

Vol.12. No.3.196

КФИ

KÖZLEMÉNYEK

СООБЩЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНОГО ИНСТИТУТА ФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

REPORTS OF THE CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS

Szerkeszti: Fenyves Ervin
Главный редактор: Е. Феньвеш
Editor: E. Fenyves

A KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZET KIADÓI CSOPORTJA
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА ЦЕНТРАЛЬНОГО ИНСТИТУТА ФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
PUBLISHING GROUP OF THE CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS
BUDAPEST, 114. POB 49.

Technikai szerkesztő: Nagy Imréné
Megjelent: 1964. júl. 5.

Pédányszám: 580
Rotaszám: 1783

A kiadásért felelős: Jánossy Lajos

KFKI

KÖZLEMÉNYEK

TARTALOM

1. Páris Gyula: Vastag elektrosztatikus lencsék néhány alapvető tulajdonsága	185
2. Németh Géza: Polinom approximációk $\int_0^x e^{-u^2} du$ számításához	201
3. Németh Géza: Gamma-függvények approximációjának meghatározása a faktor módszer alapján	205
4. Jávor András: Dinamikus munkaellenállású emitterkövető vizsgálata	211
5. Konczos Géza és Takács János: Fe-Rh ötvözet előállítására por alakban, kémiai módszerrel	227
6. Bakos László és András László: Kismennyiségű urán meghatározása dibenzoilmetánnal spektrofotometrikus úton	237
7. Gombos Péter, Roósz József és Vályi László: Sikkatódos vezérelhető elektronforrás vizsgálata	241
8. Békés Mártonné és Deme Sándor: Személyi doziméter nagy /baleseti/ dózisok mérésére	247

Р е з ю м е

I. Некоторые основные свойства толстых электростатических линз

Д. Париш

В работе дается строгое решение параксиального уравнения при распределении потенциала на оси $V = \chi + th\omega z$ и $\chi = 1$. С помощью дифференциальных уравнений Ламе и Хилла исследуется иммерсионная линза, которая по характеру распределения потенциала напоминает одиночную линзу Глазера. Если линза обладает фокальными плоскостями, то параксиальное уравнение всегда преобразуется в уравнение Хилла. Исследуются свойства иммерсионной линзы, в которой распределение потенциала на краях параболическое, а в середине — линейное. Такая линза в некоторых случаях хорошо аппроксимирует ускорительную трубку электростатического генератора. В зависимости от отношения выходного и входного напряжения, рассмотренные толстые линзы могут действовать как собирающие и как рассеивающие линзы.

2. Приближения полиномов для вычисления $\int_0^x e^{-u^2} du$

Г. Немет

В статье даются приближения полиномов с точностью на десять с половиной цифр для вычисления интеграла ошибок.

3. Определение приближения гамма-функций на основе метода факторов

Г. Немет

В статье даются точные формулы приближения на 10 цифр для нижеприведенных функций:

$$\ln \Gamma(x), \quad \psi(x) = \{ \ln \Gamma(x) \}' ,$$

$$A(x, y) = \Im \{ \ln \Gamma(x + iy) \} , \quad B(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\Gamma'(x + iy)}{\Gamma(x + iy)} \right\} .$$

4. Исследование эмиттерного повторителя с динамическим рабочим сопротивлением

А. Явор

В статье описывается изготовление транзисторного катодного повторителя типа Уайта и сравнение с обыкновенным повторителем и с каскадным эмиттерным повторителем на двух транзисторах. Исследования были проведены на входной и выходной импедансы, на усиление тока и мощности. При эмиттерном повторителе с динамическим нагрузочным сопротивлением было исследовано симметричное и асимметричное управление двух транзисторов. Показывается, что для создания предельно маленького выходного сопротивления требуется специальная установка.

5. Получение порошкообразного сплава Fe-Rh химическим методом

Г. Концощ, Я. Такач

Статья ознакомливает с химическим методом получения сплава Fe-Rh. При прокаливании в течение I-го часа при температуре 900°C тщательно отделенных осадков $\text{Fe}/\text{OH}/_3$ и $\text{Rh}/\text{OH}/_3$ получена окись FeRhO_3 . Восстановление окиси в течение одного часа и атмосфере водорода при 800°C приводит к мелкозернистому сплаву Fe-Rh. Метод применялся в интервале концентраций Rh от 25 до 75 % ат. Образование окиси FeRhO_3 изучалось термогравиметрическим методом.

6. Определение небольшого количества урана с помощью дибензоилметана методом спектрофотометрии

Л. Бакош, Л. Андраш

Было установлено, что

1./ При одновременном присутствии кислых и нейтральных органических соединений фосфора, соединения железа мешают определению урана. Их действие можно преодолеть с помощью комплексона III.

2./ В интервале концентраций 30-3000мкг/мл урана отклонение между данной и измеряемой концентрацией не превышало величину $\pm 3\%$. Ниже 30мкг/мл концентрации ошибка измерения составляла $\pm 15\%$.

7. Исследование регулируемого источника электронов с плоским катодом

П. Гомбош, Й. Рос, Л. Вали

Были исследованы свойства фокусировки источника электронов, выпускающего цилиндрический фокусированный пучок с плоским катодом. Были про-

ведены измерения на характеристики источника электронов, в случае данных параметров на стабильность, на отношение тока, выпущенного катодом и фокусированного на мишень, на величины тока, попадающего на мишень при данной геометрии в зависимости от мощности накала катода.

8. Аварийный, индивидуальный дозиметр

Е. Бекеш, Ш. Деме

Нами разработан дозиметр для измерения больших доз нейтронного и гамма излучений в случае аварийных переоблучений. Проведены расчеты для условного спектра, состоящего из трех составных частей: теплового, надтеплового (I/E) и спектра деления. Точность измерения дозы составляет 10 - 20 % в пределах 5 - 1000 рад.

S u m m a r i e s

1. Some Basic Properties of Thick Electrostatic Lenses

Gy. Páris

The rigorous solution for the potential distribution $V = \chi + th\omega z$ is given for the equation of paraxial motion in the case $\chi = 1$. An immersion lens similar to the Glaser type unipotential single lens is analysed using Lamé and Hill type differential equations. If the lens has a focal plane, the paraxial equation can be always transformed to a Hill type equation. Another immersion lens investigated gives a good approximation to the accelerator tube with homogeneous field produced by the combination of quadratic and linear potential distributions. Considered in terms of voltage multiplication either lens may be focusing or defocusing.

2. Polynomial approximations for the calculation of $\int_0^x e^{-u^2} du$

G. Németh

Polynomial approximations to ten and half digit accuracy are given for the computation of the Gauss error function.

3. Approximations to Gamma Functions by the Factor Method

G. Németh

Approximations to ten figure accuracy are given to the functions:

$$\ln \Gamma(x), \quad \psi(x) = \{ \ln \Gamma(x) \}' ,$$

$$A(x,y) = \text{Im} \{ \ln \Gamma(x+iy) \} , \quad B(x,y) = \text{Re} \left\{ \frac{\Gamma'(x+iy)}{\Gamma(x+iy)} \right\} .$$

4. Analysis of the Dynamic Load Resistance Emitter Follower

A. Jávör

The transistorization of the White Cathode Follower is considered. It is compared with the conventional emitter follower and

the cascade emitter follower consisting of two transistors. Output and input impedance, current voltage and power gain are investigated. The symmetric and asymmetric driving of the two transistors in the Dynamic Load Resistance Emitter Follower is analysed. It is shown that in order to obtain extremely small output impedance special asymmetric adjustment is required.

5. Preparation of Iron-Rhodium Alloy Powder by Chemical Method

G. Konczos, J. Takács

A chemical method for preparing iron-rhodium alloy is described. FeRhO_3 oxide is prepared by annealing properly coprecipitated $\text{Fe}/\text{OH}/3$ and $\text{Rh}/\text{OH}/3$ for 1 hour at 900°C . Iron rhodium alloy is obtained in a fine powder form by reduction of the oxide in hydrogen atmosphere for 1 hour at 800°C . This method has been applied in the composition range of 25-75 atomic percent rhodium.

The formation of FeRhO_3 oxide was checked by thermogravimetric analysis.

6. Spectrophotometric Determination of Micro-amounts of Uranium with Dibenzoylmethane

L. Bakos, L. András

It has been found in the experiments on U-determination with dibenzoylmethane reagent that

1/ in the simultaneous presence of acidic and neutral organic compounds of phosphorus the compounds of iron interfere with the determination. This disturbing effect can be eliminated by means of Complexon III,

2/ the difference between given values and mean values of U concentration as determined does not exceed $\pm 3\%$ in the concentration range from 30 to 3000 $\mu\text{g}/5\text{ml}$. In the concentration range below 30 $\mu\text{g}/5\text{ml}$ the deviation is higher than $\pm 15\%$.

7. Controlled Plane Cathode Electron Source

P. Gombos, J. Roósz and L. Vályi

Focusing properties of a plane cathode electron source emitting a cylindrically focused beam are investigated. Measurements on source characteristics, stability in the case of given parameter values, ratio of emitted to focused current, current intensities at the target in terms of cathode heating power at given geometry are reported.

8. An Emergency Personal Dosimeter

E. Békés and S. Deme

An emergency gamma- and neutron dosimeter has been constructed. The badge contains a photographic film and a set of activation detectors /Au, S, P/. Calculations have been made considering a hypothetical neutron spectrum combined of thermal, epithermal /1/E/, and fission neutrons. Doses ranging 5-1000 rads can be measured to 10-20 % accuracy.

VASTAG ELEKTROSZTATIKUS LENCSEK NÉHÁNY ALAPVETŐ TULAJDONSÁGA

Irta: Páris Gyula

Összefoglalás

Megadjuk a paraxiális mozgásegyenlet szigorú megoldását $V = \chi + \frac{1}{2} \chi^2$ potenciáeloszlásra $\chi = 1$ esetén. A Glaser-féle unipotenciális lencséhez /einzellinse/ hasonló immerziós lencse tulajdonságait Lamé- illetve Hill-típusú differenciálegyenletek segítségével vizsgáljuk. A paraxiális mozgásegyenlet mindig Hill-típusúvá alakítható, ha a lencse fokális sikkal rendelkezik. Kvadrátikus és lineáris potenciáeloszlások kombinációjából alkotott, homogénterű gyorsítócsöveket jól közelítő immerziós lencse tulajdonságait vizsgáljuk. A feszültségsokszorozás függvényében mindegyik lencsetípus lehet gyűjtő is, szóró is.

Bevezetés

Az irodalomban mindmáig csupán egyetlen olyan lencsetípus található, melyben az analitikus kifejezéssel megadott potenciáeloszlás jól megközelíti a tényleges eloszlást, és a paraxiális mozgásegyenlet szigorú megoldása is ismert. Ez a Glaser-féle tipikus unipotenciális lencse /einzellinse/ [1]. Immerziós lencsék általános tulajdonságait magában foglaló ilyen tipikus lencse azonban nem ismeretes. A mozgásegyenlet többnyire Heun-egyenletté /1. pl. [2]/ vagy Lamé-egyenletté alakítható. Ezek az egyenletek viszont igen ritkán oldhatók meg zárt explicit alakban, s az általános tulajdonságok vizsgálata szempontjából nem sokkal jelentenek többet a numerikus, vagy közelítő eljárásoknál, néha pedig a megoldó sorok nagyon gyenge konvergenciája miatt egyenesen használhatatlanok.

Nem vezet közvetlen eredményre az utóbbi időben elterjedőben lévő mátrix-formalizmus [3, 4, 5] alkalmazása sem, mint ahogy az ennek során értelmezett olyan fogalmak is, mint "acceptance" vagy "emittance", csupán új összefüggésben világítják meg a hagyományos lencseparamétereket. A későbbiekben megmutatjuk, hogy a mátrix-formalizmus bevezetésével nem menekülhetünk az eredeti problémától: a transzformációs mátrix elemeinek meghatározása teljesen ekvivalens a paraxiális mozgásegyenlet megoldásával. Igaz viszont, hogy a mátrix-formalizmus al-

kalmas a vastag lencsék tulajdonságainak rögzítésére, s ezért, ha a paraxiális mozgásegyenlet megoldása egyébként ismert, nagyon kényelmes és hatásos technikai apparátust szolgáltat mind konkrét számítások végzésére, mind alapvető elvi tulajdonságok kiderítésére.

Igy tehát hasznos lehet, ha - legalábbis néhány tipikus esetben - megvizsgáljuk az immerziós lencsékben lejátszódó mozgás alapvető tulajdonságait. Vastag lencséről lévén szó, természetesen meg kell engednünk, hogy a részecske pályája a lencse belsejében tetszőlegesen változzék. Ez viszont, legalábbis abban a tartományban, ahol a tengelymenti potenciáeloszlás második deriváltja, $V''(z)$ pozitív, oszcilláció lehetőségét jelenti. Következésképpen a szokásos meghatározás, mely szerint mivel a vizsgált lencsetípusban a részecske mindig hosszabb ideig tartózkodik a $V''(z) > 0$ tartományban, mint $V''(z) < 0$ -ban, az ilyen lencse mindig gyűjtő, elveszti hitelét. Ha a lencse belsejében oszcilláció lehetséges, a tér összehatása gyűjtő vagy szóró lencsét egyaránt eredményezhet. A cikkben erről a problémáról teszünk - konkrét példákból levonható következtetések segítségével - néhány általános megállapítást.

1/ Nagyon erős immerziós lencse

Két azonos átmérőjű, koaksziális, egymáshoz nagyon közel levő hengerből álló lencse tengelyében a potenciáeloszlás [6]

$$V(z) = \frac{V_2 + V_1}{2} + \frac{V_2 - V_1}{2} \operatorname{th} \frac{2,63}{D} z, \quad /1,1/$$

ahol V_1 és V_2 a hengerek potenciálja, D pedig átmérője. A paraxiális mozgásegyenlet ezzel a potenciáeloszlással a következő alakra hozható:

$$\frac{d^2 r}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \frac{V'_*}{V_*} \frac{dr}{d\xi} + \frac{1}{4} \frac{V''_*}{V_*} r = 0, \quad /1,2/$$

$$\text{ahol } \xi = \frac{2,63}{D} z, \quad V_* = \frac{V_2 + V_1}{V_2 - V_1} + \operatorname{th} \xi = \chi + \operatorname{th} \xi, \quad \text{a vesszők}$$

pedig ξ szerinti deriváltakat jelentenek.

Vezessünk be $\operatorname{th} \xi = \chi(2t-1)$ szerint új változót, ekkor írhatjuk

$$t(t^2 - t + \delta) \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{1}{2} (5t^2 + 3t + \delta) \frac{dr}{dt} + \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2}\right) r = 0 \quad /1,3/$$

$$\text{ahol } \delta = \frac{\chi^2 - 1}{4\chi^2} = \frac{N}{(N+1)^2}, \quad N = \frac{V_2}{V_1}, \quad \text{és} \quad \frac{1}{N+1} \leq t \leq \frac{N}{N+1}. \text{ Ha a második}$$

henger V_2 potenciálja sokkal nagyobb V_1 -nél, akkor $\chi \rightarrow 1$, $\delta \rightarrow 0$.

Ugyanez a helyzet akkor is, ha a részecskék nagyon kicsiny kezdősebességgel indulnak a lencsébe, vagyis katódobjektívek esetében. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben a pálya végtelen sokszor metszi a tengelyt. Ha ugyanis $\delta \rightarrow 0$, $t = \frac{1}{x^2}$ és $r = xu(x)$, akkor /1,3/ alapján a következőket írhatjuk:

$$x^3 \left[(1-x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2x \frac{du}{dx} - u \right] = 0, \quad /1,4/$$

és mivel $x \neq 0$, a szögletes zárójelben a Legendre-egyenletnek kell kielégülnie. Az általános megoldás tehát

$$r = x [C_1 P_\nu(x) + C_2 Q_\nu(x)], \quad /1,5/$$

ahol $\sqrt{N+1} \geq x \geq \sqrt{\frac{N+1}{N}}$, $\infty > x > 1$, $\nu = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$, C_1 és C_2 pedig tetszőleges állandók.

Mint a Legendre függvények elméletéből ismertes /1. pl. [7] 357 old. 6.784 /, a $P_{\frac{1}{2}+i\lambda}$ úgynevezett kupfüggvény valós λ esetén végtelen sok nullponttal rendelkezik. A gyökök helyén x valós és > 1 . Ennek alapján viszont véges δ értékeknél is oszcilláció várható, s N növekedésével a pálya nyilván egyre többször metszi a tengelyt.

2/ A Glaser-féle unipotenciális lencséhez hasonló immerziós lencse közelítő számítása

Az [1]-ben vizsgált potenciáeloszlás, ha $z = -d \cdot \cotg \varphi$, V_1 a szélső hengerek, V_0 a középső henger potenciálja, továbbá

$$\delta = \frac{V_1 + V_0}{V_1 - V_0} = \frac{N+1}{N-1} \text{ és } N = \frac{V_1}{V_0}, \text{ a következő alakban írható:}$$

$$V = V_1 - \frac{V_1 - V_0}{1 + \left(\frac{z}{d}\right)^2} = \frac{V_1 - V_0}{2} \left(\frac{2N}{N-1} - 1 + \cos 2\varphi \right) = \frac{V_1 - V_0}{2} (\delta + \cos 2\varphi). \quad /2,1/$$

Ugyanilyen típusu, de immerziós lencse potenciáeloszlása az alábbi függvénnyel adható meg:

$$V = \frac{V_2 + V_1}{2} + \frac{V_2 - V_1}{2} \frac{\left(\frac{z}{d}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{d}\right)^2}} = \frac{V_2 - V_1}{2} (\delta_1 \cos \varphi), \quad /2,2/$$

ahol $\delta_1 = \frac{V_2 + V_1}{V_2 - V_1} = \frac{N_1 + 1}{N_1 - 1}$, $N_1 = \frac{V_2}{V_1}$. Általában megvizsgálhatjuk a

$$V_* = \delta + \cos k\varphi \quad /2,3/$$

potenciáeloszlást. A $\cos k\varphi$ előjelének felcserélése nem játszik jelentős szerepet, csupán a határok felcserélését, vagy az argumens lineáris eltolását jelenti. A paraxiális egyenlet, ha $z = -d \cotg \varphi$ és $V^{1/4} r \sin \varphi = v$, a következő:

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + \left(1 + \frac{3}{16} \frac{\dot{V}^2}{V^2} \right) v = 0, \quad /2,4/$$

ahol a pont már φ szerinti deriváltat jelent. Ha elfogadjuk a /2,3/ potenciáeloszlást, és bevezetjük a

$$\cos k\varphi = \wp(t) - \frac{1}{3}\delta, \text{ a gyökök } e_1 = 1 + \frac{1}{3}\delta, e_2 = \frac{1}{3}\delta - 1, e_3 = -\frac{2}{3}\delta \quad /2,5/$$

szerinti új változót, ahol $\wp(t)$ a Weierstrass-féle elliptikus függvény, továbbá $\eta = V^{-1/2}\nu$, a Lamé-egyenlethez jutunk

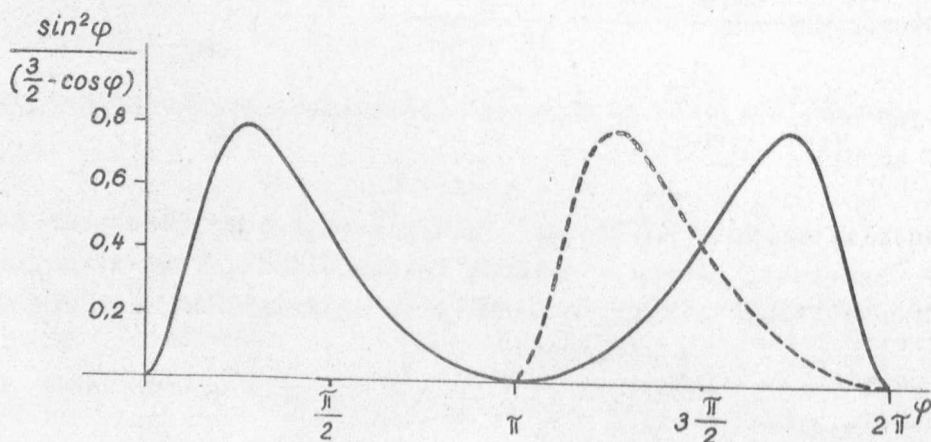
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \left[\frac{4-k^2}{k^2} \wp(t) + \frac{8+k^2}{3k^2} \delta \right] \eta. \quad /2,6/$$

Ebben a reprezentációban a Glaser-féle unipotenciális lencse az a szerencsés eset, amikor $k=2$, és /2,6/ kontans együtthatóju differenciálegyenletté válik. Ha $\frac{4-k^2}{k^2} = n(n+1)$, ahol n egész szám, a megoldást kereshetnénk zárt alakban. Például a $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $n=1$ eset valószínűleg reális potenciáeloszlásnak felel meg, ilyen, egyik oldalon enyhén visszaeső potenciáeloszlás kialakulhat tértöltéses katódlencsében. Ekkor a megoldás a σ és ζ Weierstrass-féle elliptikus függvények segítségével zárt alakban adható meg [8]:

$$\eta = \frac{\sigma(t+\alpha)}{\sigma(t)} e^{\pm t \cdot \zeta(\alpha)}, \quad /2,7/$$

ahol $\wp(\alpha) = \frac{8+k^2}{3k^2} \delta$ szolgál α meghatározására. Egyszerű immerziós lencse esetében azonban $k=1$, n pedig nem egész szám, s kész összefüggéseket valószínűleg nem használhatunk. Kézenfekvőnek látszik viszont a következő eljárás. A /2,4/-ben szereplő $\left(\frac{3}{16} \frac{\nu^2}{V^2}\right)$ függvényt Fourier-sorba fejtjük, s az így előálló Hill-típusú differenciálegyenletet vizsgáljuk meg a lencse alapvető sajátosságainak megállapítása céljából. A továbbiakban ezt a módszert követjük.

A $\frac{3}{16} \frac{\nu^2}{V^2}$ függvényt a $0 \leq \varphi \leq \pi$ intervallumban sorbafejtve és figyelembe véve, hogy a $\frac{\nu^2}{V^2}$ függvény /2,2/ szerint a következő alakú $\gamma = \frac{3}{2}$ értéknél:



/2,4/ -et az alábbi formában írhatjuk fel /párosan folytatva a $(0-\pi)$ intervallumon kívül, mint a szaggatott görbe mutatja:/

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + \left(\Theta_0 + 2 \sum_{v=1}^{\infty} \Theta_v \cos 2v\varphi \right) v = 0, \quad /2,8/$$

ahol

$$\Theta_0 = 1 + \frac{3}{8} \frac{p^2}{1-p^2}, \quad \Theta_v = \frac{3}{16} p^{2v} \left(\frac{1+p^2}{1-p^2} - 2v \right)$$

$$p = \frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}+1}, \quad \sum_{v=1}^{\infty} \Theta_v - \text{konvergens.}$$

A Hill-egyenlet klasszikus alakjához jutottunk tehát. Mint ennek elméletéből ismert, a partikuláris megoldás $e^{\mu\varphi} \Phi(\varphi)$ alakú, ahol $\Phi(\varphi+r) = \Phi(\varphi)$ periódikus függvény, a μ pedig valós, vagy képzetes paraméter. Ha valós, /2,8/ megoldásait instabilisnek mondjuk, míg képzetes μ esetén a megoldás stabilis. Valós /vagy akár komplex/ μ esetén ugyanis a $v = C_1 e^{\mu\varphi} \Phi(\varphi) + C_2 e^{-\mu\varphi} \Phi(\varphi)$ megoldás, ha $\varphi \rightarrow \infty$, n azonos szakaszon áthaladván, és $n \rightarrow \infty$, szintén tart a végtelen felé, és csupán tisztán képzetes μ értéknél marad korlátos. Ez a kritérium egyetlen periódus vizsgálata alapján megállapítható. Az elektrosztatikus lencsék esetében a kritérium éppen a lencsék gyűjtő-szóró tulajdonságairól ad felvilágosítást: képzetes μ esetén a pálya korlátos, a lencse gyűjtő, míg valós, vagy komplex μ értékeknél szóró lencsét kapunk.

[9] -ben igen kényelmes, de sajnos eléggé durván közelítő összefüggéseket adnak meg a szórótartományok határainak kiszámítására. A tartományhatárok pontos helyét, valamint a megoldást is meghatározhatjuk a Hill-egyenletre kidolgozott elmélet alapján /l.pl. [10], vagy akár [9] is/, most azonban csupán arra szorítkozunk, hogy megmutassuk a szórótartomány létét. /2,8/ -ban Θ_0 , ha $N=1$, $p=0$, tehát amikor a hengerek között nincs potenciálkülönbség, éppen egységnyi. Az első szórótartomány tehát $\Theta_0 \sim 4$ körül helyezkedik el. [9] egyszerű összefüggése alapján a szórótartományok határain

$$\Theta_0 = (v+1)^2 \pm \Theta_v, \quad /2,9/$$

Ennek alapján az első szórótartomány $N \sim 420$ körüli értékénél, a második $N \sim 4200$ körülinél kezdődik. /2,9/ e tartományok felső határaitra $N \rightarrow \infty$ értéket ad, nyilvánvalóan a durva közelítés miatt. [9] is ad pontosabb összefüggéseket, ezzel azonban most nem foglalkozunk.

Azt mondhatjuk tehát, hogy az optikai tulajdonságok szempontjából immerziós lencsék is rendelkezhetnek, az unipotenciális lencsékhez, vagy periódikus terekhez hasonlóan, zónás, sávós, váltakozóan gyűjtő-szóró tulajdonságokkal bíró szerkezettel.

Ugyanezt az eljárást megismételhetjük a /2,1/ potenciáeloszlással is. Ekkor azonban, még ha $2\varphi = \psi$ új változóra térünk is át, nem folytathatjuk a sorbafejtendő függvényt a $(0, \pi)$ intervallumon kívül párosan, mivel az a $(0, 2\pi)$ intervallumban van értelmezve. Ennek megfelelően az új egyenlet

$$\frac{d^2 v}{d\psi^2} + \left(\Theta_0 + 2 \sum_{v=1}^{\infty} \Theta_v \cos v\psi \right) v = 0, \quad /2,10/$$

ahol

$$\Theta_0 = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \frac{p^2}{1-p^2}, \quad \Theta_v = \frac{3}{16} p^v \left(\frac{1+p^2}{1-p^2} - v \right)$$

p - az előbbi, $\sum \Theta_v$ - konvergens.

Most [9] alapján, mivel az együtttható argumensében $v\psi$ szerepel $2v\psi$ helyett, a szórótartományok határán

$$\Theta_0 = \left(\frac{v+1}{2} \right)^2 + \Theta_v. \quad /2,11/$$

Ha a pl. [11] -ben vagy [12] -ben használt R tényezőt vizsgáljuk a zónahatárokon, ennek nálunk $\frac{1}{N}$ felel meg. Az első szórótartomány határán /2,11/ alapján $R \sim 0,0244$, tehát 2,44% / [11] terminológiája szerint ekkor kezdődik a második üzemi zóna, ott mért eredményként 2,5%-ot közölnek/. A második szórótartomány /negyedik üzemi zóna/ $R \sim \frac{1}{225}$ értékénél kezdődik.

Természetesen az utóbb tárgyalt unipotenciális lencsét [1] alapján szigorú összefüggések segítségével vizsgálhatjuk, itt az immerziós lencse adott vizsgálati mód szerének értékét kívántuk az összehasonlítással bemutatni.

3/ Parabolikus potenciáeloszlás

A paraxiális mozgásegyenlet numerikus megoldásának egyik legegyszerűbb módja az ugynevezett Gans-módszerrel történő integrálás. Ez abból áll, hogy az adott potenciáeloszlást poligonnal helyettesítjük. Az egyenes szakaszokon hiányzik a $V''(z)$, a részecskék parabola-pályákon mozognak, a lencsehatás pedig a törési pontokban koncentrálódik.

Valamivel jobb közelítést érhetünk el, ha a tényleges potenciáeloszlást parabolaívvel helyettesítjük. Parabolikus potenciáeloszlásra a mozgásegyenlet szigorúan megoldható, s a megoldás vizsgálá-

lata azonnal megvilágítja az előző paragrafusban mondottak értelmét is.

Vezessünk be /1,2/ -ben új változót

$$dT = \frac{dz}{\sqrt{V}}, \quad \frac{d}{dT} = \sqrt{V} \frac{d}{dz}, \quad \frac{d^2}{dT^2} = V \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2} V' \frac{d}{dz} \quad /3,1/$$

szerint. Ekkor az egyenlet új alakja

$$\frac{d^2 r}{dT^2} + \frac{1}{4} V'' r = 0 \quad /3,2/$$

ahol $V''[z(T)]$ elvileg /3,1/ alapján T függvényében írható fel. $V(z)$ megadható pl. hatványsor alakjában. Ha ebben a $(z-z_0)^2$ -nél magasabb kitevőjű tagokat elhagyhatjuk, jutunk a parabolikus potenciáeloszláshoz. Legyen tehát $V = az^2 + bz + c$. Ekkor $V''(z) = 2a = \text{konst}$, és /3,2/ megoldása „ a ” előjelétől függően

$$r = \begin{cases} A \sin\left(\sqrt{\frac{a}{2}} T + B\right), & \text{ha } a > 0, \\ C \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{-a}{2}} T + D\right), & \text{ha } a < 0, \end{cases} \quad /3,3/$$

vagy, ha képzetes mennyiségeket is megengedünk, választhatjuk csak az egyik alakot is. /3,1/ -ből „ a ” előjelétől, illetve a kvadrátikus alak diszkriminánsától függően ismét kétfajta összefüggést kapunk:

$$T + \text{konst} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Arsh} \frac{2az+b}{\sqrt{\Delta}}, & \text{ha } a > 0, \Delta > 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{2az+b}{\sqrt{-\Delta}}, & \text{ha } a < 0, \Delta < 0, \end{cases} \quad /3,4/$$

ahol $\Delta = 4ac - b^2$. Összefoglalva

$$r = K \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arsh} \frac{2az+b}{\sqrt{\Delta}} + \Theta\right), \quad /3,5/$$

ahol K és Θ tetszőleges, a határfeltételekkel megadott állandók, s a Δ előjele dönti el, szinuszos, vagy hiperbolikus jellegű-e a részecske pályája.

/3,5/ alapján látható, hogy azokban a térrészekben, ahol $V''(z)$ negatív, a pálya nem oszcilláló jellegű. $V''(z)$ pozitív értékei mellett azonban igen, és a, b, c alkalmas megválasztásával az oszcilláció kritériuma /kettő, vagy annál több metszéspont a tengellyel adott $(z_1 - z_0)$ intervallumon belül/ is teljesülhet.

A /3,1/ -ben bevezett T változó idő jellegű, az időtől csak egy arányossági szorzóval különböző mennyiség. /3,2/ baloldalának első

tagja tehát gyorsulás jellegű, s így $V''(z)$ előjele a részecskére ható erő irányát is jelenti egyben. Pozitív $V''(z)$ esetén ez az erő a tengely felé hat, illetve "gyűjtő" hatása. Olyan egyszerű potenciáeloszlások esetén, mint $1,1/$, akár gyorsító, akár lassító lencséről van szó, $V''(z)$ mindig egymástól élesen elválasztható két tartományból áll s a tér természetéből következik, hogy a részecske mindig hosszabb ideig tartózkodik "gyűjtő", mint "szóró" tartományban. Ebből azonban helytelen volna azt a következtetést levonni, hogy az adott lencsetípus mindig gyűjtőlencse. Ez csak abban az esetben igaz, ha a részecske tengelytől való távolsága a lencse terében nem változik meg számottevően, vagyis "gyenge" illetve "vékony" lencsék esetén, általában nem.

Még egy lényeges megállapítást tehetünk az előbbiek alapján. Az $1,1/$ típusu lencsék terében a pályák mindig $V''(z)$ pozitív értékei mellett metszhetik többször a tengelyt. A lencse "vastagságának" növelésével a metszéspontok száma megnő, s mivel a pálya a határokon egyenesbe megy át, ezen metszéspontok nyilván besűrűsödnek a lencse közepe felé, de mindig $V''(z)$ pozitív előjelű tartományában. A besűrűsödés az amplitudók vonatkozásában is lényeges lehet. Az erős oszcillációs tartományban ugyanis a lencsébe jutott részecskék a tengely közelében tartózkodnak, tehát itt elektródokkal is közelebb férhetünk egy nyalábhoz lényeges veszteség nélkül. Más oldalról pedig ebben a tartományban a mozgás jobban megközelíti a paraxiálitás feltételét, "lineárisabb" optikát nyerhetünk. Ez a tulajdonság alkalmas lehetne például a különböző aberrációs hibák tudatos csökkentésére /azon hibákra gondolunk, melyek a tengelytől mért távolsággal, vagy annak hatványával növekednek./

4/ A mátrix-formalizmusról

[13] -ban megmutattuk, hogy a lencsetulajdonságok mátrixalakban való felírása kényelmes eszközt szolgáltat annak eldöntésére, gyűjtő vagy szóró lencsével van-e dolgunk? Most megmutatjuk, hogy a mátrix-formalizmus alkalmazása nem mentesít a mozgásegyenlet megoldása alól. Pontosabban: a transzformációs mátrix elemeinek meghatározása egybeesik a mozgásegyenlet megoldásával.

Mint [13] -ban láttuk, ha mátrix-formalizmus alkalmazása jogos, a mozgást jellemző r rádiusz és p_r impulzus /kanonikus/ között fennáll az alábbi összefüggés:

$$ar^2 + 2brp_r + cp_r^2 = 1, \quad /4,1/$$

ahol a , b és c csak z -nek, vagy az előző pontban alkalmazott transzformációval csak t -nek /ott T -nek/ függvényei. /4,1/ idő szerinti deriválása után /ponttal jelöljük az idő szerinti deriváltakat/ kapjuk:

$$2ar\dot{r} + \dot{a}r^2 + 2b(r\dot{p}_r + \dot{r}p_r) + 2b\dot{r}p_r + 2c p_r \dot{p}_r + \dot{c}p_r^2 = 0. \quad /4,2/$$

Minthogy /3,2/ alapján $\dot{p}_r = \varphi(t)r$, továbbá $\dot{r} = A p_r$, ahol A állandó mennyiség, kapjuk:

$$[\dot{a} + 2b\varphi(t)]r^2 + 2[Aa + \dot{b} + c\varphi(t)]r p_r + [2Ab + \dot{c}]p_r^2 = 0. \quad /4,3/$$

Minthogy /4,1/ alapján /4,3/ -nak azonosan ki kell elégülnie, kell, hogy

$$\left. \begin{aligned} a + 2b\varphi(t) &= 0 \\ Aa + \dot{b} + c\varphi(t) &= 0 \\ 2Ab + \dot{c} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad /4,4/$$

Ebből pl. C -re differenciálegyenletet állítva össze, kapjuk

$$\ddot{C} - 4A\varphi(t)\dot{C} - 2A\dot{\varphi}(t)C = 0 \quad /4,5/$$

/4,5/ általános megoldása

$$C = C_1 u_1^2 + C_2 u_1 u_2 + C_3 u_2^2, \quad /4,6/$$

ahol C_1 , C_2 és C_3 integrációs állandók, u_1 és u_2 pedig az alábbi differenciálegyenlet megoldásának alaprendszere:

$$\ddot{u} - A\varphi(t)u = 0. \quad /4,7/$$

Utóbbi egyenlet pedig teljesen ekvivalens a /3,2/ egyenlettel, tehát C , és így a és b meghatározása is, teljesen egyenértékű a paraxiális mozgásegyenlet megoldásával.

A mátrix-formalizmus nagy haszna tehát éppen abban van, hogy ha valamilyen módon megoldottuk a mozgásegyenletet /meghatároztuk a mátrix-elemeket/, a transzformációs mátrix nyoma /spur/ azonnal eldönti, gyűjt-e a lencse, vagy szór, nem pedig a lencseparaméterek meghatározásában. A következő pontban egy nagyon egyszerű lencsemodellel mutatjuk be ezt a tulajdonságot.

5/ Kvadratikus és lineáris potenciáeloszlás kombinációjával képzett immerziós lencse

A 3. pontban előállított megoldás segítségével megvizsgálunk egy olyan optikai rendszert, mely a homogénterű gyorsítócsövek első közelítésének tekinthető. Ezekben ugyanis gyakorlatilag a rendszer teljes hosszában lineárisan változik a potenciál, csupán a végeken "türemlik" ki a

tér, megy át bonyolultabb változással az erőtermentes tartományba. Ezt az átmenetet nyilván leírhatnánk hatványsor segítségével, vagy alkalmazhatnánk rá a geometriának megfelelő analitikus függvényt. Egyszerűbb eset, ha a hatványsor első néhány tagját vesszük figyelembe, vagy a valószínű eloszlást parabolaívvel közelítjük meg. Mint látni fogjuk, már ez az egyszerű eset is hűen tükrözi a mozgás oszcillációs sajátosságait.

Legyen a cső elején és a végén a kvadrátikus szakasz hossza „l”, a középső homogén szakaszé pedig „K”. Illesszük egymáshoz ezen tartományokat olyképpen, hogy a határokon a potenciál és a térerősség törés ill. ugrás nélkül, folytonosan menjen át egymásba. Vezessük be a kanonikus impulzust $P_r = \sqrt{2V} \frac{dr}{dz}$ szerint, és használjunk mátrixformalizmust. Ekkor a lencse összes tulajdonsága felírható két paraméter, az N teljes feshűtségszorzó, valamint a $\frac{K}{l}$ viszony függvényében.

Ha r_0 a csőbe lépő nyaláb tengelytől való távolsága, r_1 és r_2 a homogén szakasz kezdetén és végén, r_3 pedig a kilépő pályasugarat jelenti, az egyes tartományokra az alábbi összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ p_{r_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \alpha \\ -\sqrt{a} \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad /5,1-a/$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ p_{r_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \frac{K}{\sqrt{V_2 + \sqrt{V_1}}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad /5,1-b/$$

$$\begin{pmatrix} r_3 \\ p_{r_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \beta & \frac{1}{\sqrt{|a|}} \operatorname{sh} \beta \\ \sqrt{|a|} \operatorname{sh} \beta & \operatorname{ch} \beta \end{pmatrix} \quad /5,1-c/$$

ahol „a” az előzőkből ismert paraméter, V_1 és V_2 a homogén tartomány alsó és felső határán lévő potenciál, s a teljes csatolómátrix képzésekor ezeket is N és $\frac{K}{l}$ segítségével fejezhetjük ki, továbbá

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arsh} \sqrt{\frac{N-1}{2(1+\frac{K}{l})}} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{\frac{N-1}{2N(1+\frac{K}{l})}} \quad /5,2/$$

Az /5,1 a-c/ és /5,2/ képletek alapján meghatározhatnánk a lencse paramétereit, felhasználva pl. [14]-ben levezetett összefüggéseket. Ehelyett azonban csupán a stabilitási tartományokat vizsgáljuk meg néhány érdekes esetben. A teljes csatolómátrix spur-ja alapján a lencse gyűjt, ha

$$\left| \cos \alpha \operatorname{ch} \beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{K}{l} \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{(1+\frac{K}{l})N+1} + \sqrt{1+\frac{K}{l}+N}} (\cos \alpha \operatorname{sh} \beta - \sin \alpha \operatorname{ch} \beta) \right| < 1. \quad /5,3/$$

Ha $n=1$, $\alpha=0$, $\beta=0$, és a spur éppen $+1$. Növekvő N -nél csökken, majd negatívba megy át, s az első gyűjtő tartomány határán éppen -1 . Várhatóan ez már nagy N értékeknél következik be, megkíséreljük ezért /5,3/ egyszerűsítését. Figyelembe vehetjük még, hogy ha nincs erőszakolt aláosztás, a cső mentén végig azonos ellenállásokon esik a potenciál, a természetes kitüremlés viszonylag gyorsan lezajlik, 2-3 elektrodaköz után már beáll a lineáris potenciálmenet. Ezért a $\frac{K}{l}$ viszony numerikusan elég nagy, 20-30 körüli érték.

β -ra tehát jó közelítéssel írhatjuk

$$\beta \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2(1+\frac{K}{l})}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{K}{l}}}$$

Legyen pl. $\frac{K}{l} = 24$, ekkor $\beta = 0,1$, $\operatorname{ch} \beta = 1,005$, $\operatorname{sh} \beta = 0,1002$

és

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arsh} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{N-1}{2}},$$

továbbá

$$|\cos \alpha + 12\sqrt{2} \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{49N+1} + \sqrt{49+N}} (0,1 \cos \alpha - \sin \alpha)| < 1.$$

A tört számlálójából és nevezőjéből kiemelve \sqrt{N} -et, jó közelítéssel írhatjuk, mivel $\sqrt{1-\frac{1}{N}} \approx 1$, $\sqrt{49N+1} \approx 7\sqrt{N}$, $\sqrt{49+N} \approx \sqrt{N}(1+\frac{49}{2N})$,

$$|\cos \alpha + \frac{12\sqrt{2}}{7+1+\frac{49}{2N}} (0,1 \cos \alpha - \sin \alpha)| < 1. \quad /5,4/$$

Az első gyűjtőtartomány felső határán, ahol N -re 100 körüli értéket várnunk, a tört nevezőjét 8,2-nek vesszük. Ekkor a határon $1,21 \cos \alpha - 2,1 \sin \alpha = -1$, illetve $\cos(\alpha+\Theta) \approx -0,414$, $\Theta \approx 1,05 \text{ rad}$, $\alpha+\Theta \approx \pi-1,14$, $\alpha \approx 0,95 \text{ rad}$.

Igy tehát

$$\sqrt{\frac{N-1}{2}} = 5 \operatorname{sh} \sqrt{2} \cdot 0,95 \approx 8,9, \quad N \approx 160.$$

A következő gyűjtőtartomány alsó határától már elhagyhatjuk /3,4/-ben a tört nevezőjéből a $\frac{49}{2N}$ tagot, és így

$$\cos(\alpha+1,07) = \pm 0,394.$$

Akár ebből a képletből, akár az előzőből határozzuk meg a második gyűjtőtartomány kezdetét, N -re igen nagy értéket kapunk: $N \sim 10^5$. Tehát jóllehet az első paragrafusban vizsgált immerziós lencsével durván azonos sáv szélességet kaptunk az első gyűjtőtartományra, már az első szórótartomány is gyakorlatilag áthidalhatatlan.

Ugyanígy jellegű becsléssel megvizsgáljuk, hogyan befolyásolja $\frac{K}{l}$ változása az optikai tulajdonságokat. Ki lehet-e például erőszakolt

aláosztással az első gyűjtősáv határát számottevően terjeszteni? Most írjuk közelítőleg

$$\operatorname{ch} \frac{1}{2\sqrt{1+2\frac{K}{l}}} \approx 1, \quad \operatorname{sh} \frac{1}{2\sqrt{1+2\frac{K}{l}}} \approx \frac{1}{2\sqrt{1+2\frac{K}{l}}},$$

és a stabilitási kritérium

$$\left| \frac{1+(\sqrt{2}+\frac{1}{4})\sqrt{\frac{K}{l}}}{1+\sqrt{2\frac{K}{l}}} \cos \alpha - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{K}{l}}{1+\sqrt{2\frac{K}{l}}} \sin \alpha \right| < 1.$$

Feltettük még, hogy $\sqrt{1+2\frac{K}{l}} \approx \sqrt{2\frac{K}{l}}$. Kis átalakítás után

$$|\cos(\alpha+\Theta)| < \frac{1+\sqrt{2\frac{K}{l}}}{\sqrt{[1+(\sqrt{2}+\frac{1}{4})\sqrt{\frac{K}{l}}]^2 + \frac{1}{2}\frac{K^2}{l^2}}}, \quad /5,5/$$

$$\Theta = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{K}{l}}{1+(\sqrt{2}+\frac{1}{4})\sqrt{\frac{K}{l}}} \quad /5,6/$$

Látjuk, hogy $\frac{K}{l}$ csökkenésével, vagyis a kvadratikus tartomány hosszabbodásával egyrészt csökken a Θ , s így ugyanolyan $\cos(\alpha+\Theta)$ értéket nagyobb α , tehát N értéknél érünk el, másrészt a $\cos(\alpha+\Theta)$ -ra megengedett érték is növekszik, vagyis az első gyűjtőtartomány határait jelentősen tágíthatjuk. Ha pl. $K=8$, $\Theta=0,785$, és $\alpha+\Theta=\pi-0,9$ a határon, tehát $N \approx 750$. A KFKI EG-2 generátorában $\frac{K}{l} \sim 7$, erre a felső határ $N \sim 950$. Mivel /5,5/ jobboldala és /5,6/ argumense arányosan változik, a következő gyűjtőtartomány alsó határa $\frac{K}{l}$ változásakor alig mozdul el.

A volna az ideális állapot, ha /5,5/ jobboldala egység, vagy egynél nagyobb lenne, ekkor ugyanis végig gyűjtőlencsét kapnánk az $1 < N < \infty$ intervallumban. Ez akkor következne be, ha $\frac{K}{l} = 0$, vagy

$$\left(\sqrt{\frac{K}{l}}\right)^3 + 1,54\sqrt{\frac{K}{l}} + 1 = 0,$$

ami fizikailag nyilvánvalóan lehetetlen. Egyébként is világos, hogy /5,5/-ben a nevező mindig nagyobb a számlálónál.

Megjegyezzük, hogy kvadratikus potenciáeloszlás esetén a mozgás minden közelítés nélkül, szigorúan vizsgálható. Nem szükséges tengelyközeli tartományra sem korlátoznunk magunkat. Az alábbi potenciáeloszlás

$$V = a\left(z^2 - \frac{r^2}{2}\right) + bz + V_0 \quad /5,7/$$

kielégíti a Laplace—egyenletet, s a mozgásegyenletek szigorúan megoldhatók az adott potenciáeloszlásra. Ha $b=0$, és $V=V_0$, akkor $z_0^2 = \frac{r_0^2}{2}$, tehát ha a gyorsítócső végét

$$\operatorname{tg} \Theta_0 = \frac{r_0}{z_0} = \sqrt{2} \quad /5,8/$$

félkúpszögű kónuszus elektródával zárjuk le, az adott eloszlás majdnem automatikusan kialakul. A pályákat az alábbi formában kapjuk / a cső bemeneténél a > 0/:

$$r = A \sin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arsh} \frac{z}{B} - \frac{\Psi}{\sqrt{2}} + \Theta \right), \quad /5,9/$$

ahol A, B, Θ , Ψ kezdeti állandók:

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= A \sin \Theta, & \dot{r}_0 &= \sqrt{\eta a} A \cos \Theta; \\ z_0 &= B \operatorname{sh} \Psi, & \dot{z}_0 &= \sqrt{2 \eta a} B \operatorname{ch} \Psi \end{aligned} \right\}. \quad /5,10/$$

A kvadratikus felfutás a csőben lineárisba megy át, a pályák pedig parabolaivé, a cső végén lévő kitüremlés hatása jelentéktelen. Ezért, ha a nyaláb tértöltését elhanyagolhatjuk, a leírt gyorsítócsőben a nyaláb mozgása pontosan meghatározható. /5,9/-ből a pálya oszcillációs jellege mindenestre teljesen világos, s egyben azt is látjuk, ha /3,5/-tel egybevetjük, hogy a paraxiális megoldás a teljes megoldásnak minden alapvető tulajdonságát tartalmazza.

6/ Következtetések

a/ A bemutatott példából kitűnik, hogy ha az elektrosztatikus lencse nem tekinthető vékonynak, immerziós lencsék esetében is oszcillációt várhatunk, hasonlóan az unipotenciális lencsékhez. Ez azt jelenti, hogy alacsony feszültségsokszorozásról indulva, bizonyos értékig gyűjtőlencseként hat az erőter, majd optikai hatását tekintve szóróvá válik. Tovább növelve a sokszorozást, ezek a tartományok ismétlődnek. Végtelen nagy sokszorozás esetén végtelen sok gyűjtő- szóró sávot találunk az N. sokszorozás függvényében.

b/ Vastag lencsék esetében valószínűleg helyesebb volna a mozgásegyenleteket gömbkoordinátarendszerben, vagy elliptikus koordinátarendszerben felírni. Az első két pontban láttuk, hogy az ilyen térszerkezetet jellemző függvények írják le a pályákat. A paraxiális mozgásegyenlet alakja olyan, hogy a V potenciáeloszlásra nézve a konstans együtthatóktól eltekintve ugyanolyan lineáris másodrendű egyenlet mint az r pályára nézve. Minthogy az optikai hatás éppen a térkitüremlések, az elvipotenciális felületeknek gömbivé való elhajlása miatt áll elő /emiatt jelentkezik radiális erőhatás/, a pálya lényeges módosítása a gömbi téreloszlás tartományában zajlik le, s így r -re ugyanolyan típusu függvény várható, mint V -re.

c/ Az első szórótartomány elég nagy feszültségsokszorozásoknál, nagyságrendben százaz N értékeknél következik be. Gyakorlatilag kö-

zönséges lencsében ilyen értékek ritkán fordulnak elő, de részecskeforrásokban /ágyukban/ és homogénterű gyorsítócsövekben ugyyszólván mindig. Ezek vizsgálatánál tehát nem tekinthetünk el az oszcillációs tulajdonságtól, különben teljesen helytelen eredményekre jutunk.

d/ Az 1. pontban megadtuk a $\chi + th\omega z$ potenciáeloszlásu lencsére a mozgásegyenlet megoldását $\chi = 1$ esetén. Ez a megoldás alkalmas arra, hogy szukcessziv aproximációval, pl. integrálegyenletek módszerével, közelítő megoldásokat határozzunk meg $\chi > 1$ értékekre is.

e/ A második pontban alkalmazott sorbafejtés mindig végrehajtható, amikor fokális síkokkal rendelkező lencséről beszélhetünk. Ennek ugyanis szükséges és elégséges feltétele [12] szerint az

$$\int \frac{3}{16} z^2 \frac{V'^2(z)}{V^2(z)} dz$$

integrál korlátossága /a vessző z -szerinti deriváltat jelent./ Ha ez az integrál korlátos, korlátos

$$\int \frac{3}{16} (1+z^2) \frac{V'^2(z)}{V^2(z)} dz$$

is. Ha itt $z = -ctg \psi$, $dz = \frac{d\psi}{\sin^2 \psi}$, akkor korlátos az

$$\int \frac{3}{16} \frac{V^2(\psi)}{V^2(\psi)} d\psi$$

integrál is /ponttal a ψ -szerinti deriváltat jelöltük/, ez pedig ekvivalens /2,4/ együtthatójának konvergens sorba fejthetőségével.

I r o d a l o m

- [1] Glaser, Schiske: Optik, 11, 422, 445, /1954/; Optik, 12, 233 /1955/
- [2] Wendt G.: Z.f. angew. Phys. III. 219 /1951/
- [3] Timm U.: Z. Naturforsch., 109, 593 /1955/
- [4] Walsch T.R.: Plasma Phys. /J.Nucl.En.Part C/, 4, 53 /1962/ 5, 17/1963/
- [5] Rose P.H.: Nucl.Instr. and Meth., 14, 79 /1961/
- [6] Spangenberg K.R.: Vacuum Tubes, McGraw-Hill, 1948
- [7] Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Г.И. Ф-М.Л. Москва, 1962.
- [8] Kamke E.: Differentialgleichungen, Leipzig, 1959.
- [9] Тихиро Хаяси: Вынужденные колебания в нелинейных системах, И.И.Л., Москва, 1957.
- [10] McLachlan N.W.: Theory and Application of Mathieu Functions, Oxford, 1947.
- [11] Лебедев, Электронная микроскопия, Москва, 1957.
- [12] Glaser W.: Grundlagen der Elektronenoptik, Wien, 1952.
- [13] Páris Gy.: KFKI Közl. 10, 451 /1962/
- [14] Sturrock P.A.: Static and Dinamic Electron Optics, Cambridge, 1955.

Érkezett: 1964. jun. 2.

KFKI Közl. 12.évf. 3.szám, 1964.

POLINOM APPROXIMÁCIÓK $\int_0^x e^{-u^2} du$ SZÁMITÁSÁHOZ

Írta: Németh Géza

Összefoglalás

A dolgozat tiz és fél jegy pontosságú polinom-közelítéseket tartalmaz a Gauss-féle hibaintegrál számításához.

Polinom approximációkat készítettünk az

$$F(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$$

függvény /Gauss-féle hibaintegrál/ URAL 1 elektronikus számológépen történő generálásához. /Megjegyezzük, hogy a képletek alkalmasak kézi számolásra vagy más gépen való számoláshoz is./ Az approximációs együtthatókat a függvény Csebisev polinomok szerinti sorfejtésének megfelelő részletösszegéből számítottuk ki. Ismeretes [1], hogy ez az eljárás aszimptotikusan "majdnem" a legjobb közelítést adja.

A $/0, \infty/$ intervallumot két részre osztva, a $/0, a/$ és $/a, \infty/$ intervallumokra adunk meg közelítéseket. Mivel előre nem világos, "a" mely választása a legcélszerűbb, képleteink levezetése előtt "a" értékét nem konkretizáljuk.

Először a $/0, a/$ intervallumot tekintve legyen $x = at$,

$$\int_0^x e^{-u^2} du = x \cdot \int_0^1 e^{-a^2 t^2 \eta^2} d\eta \quad 0 \leq t \leq 1$$

Az utóbbi integrált Csebisev polinomok szerint sorbafejtjük oly módon, hogy az integrandust t hatványai szerint haladó Csebisev sorral helyettesítjük, és az együtthatókat η szerint kiintegráljuk. Így kapjuk:

$$\int_0^1 e^{-a^2 t^2 \eta^2} d\eta = q_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q_n T_n^*(t^2) \quad 0 \leq t \leq 1,$$

ahol

$$q_n = \int_0^1 e^{-\frac{a^2}{2} \eta^2} I_n\left(\frac{a^2}{2} \eta^2\right) d\eta = O\left(\frac{(a/2)^{2n}}{n!}\right).$$

A q_n számokat az alábbi rekurziósképletből számíthatjuk ki:

$$(2n+1)(q_n - q_{n+1}) = e^{-\frac{a^2}{2}} \left[I_n\left(\frac{a^2}{2}\right) + I_{n+1}\left(\frac{a^2}{2}\right) \right] \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ez a képlet az integrál előállításból egy parciális integrálással és a Bessel-függvények rekurziós képletének alkalmazásával nyerhető.

Az $a \leq x < \infty$ esetben /célszerűségi okok miatt/ $F(x)$ helyett a

$$G(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - F(x) = \int_x^\infty e^{-u^2} du = \frac{e^{-x^2}}{2x} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{(1+\eta/x^2)^{1/2}} d\eta$$

kifejezést approximáljuk, abban is az integrál kifejezést. Ezt a kifejezést néhány elemi átalakítással az alábbi alakra hozhatjuk:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{(1+\eta/x^2)^{1/2}} d\eta = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-a^2 \eta}}{\eta^{1/2}} \frac{1}{1+\sigma \eta} d\eta, \quad \sigma = \left(\frac{a}{x}\right)^2 \leq 1.$$

Ez utóbbi integrált $\frac{1}{1+\sigma \eta}$ Csebisev-sorfejtése segítségével Csebisev sorba fejthetjük:

$$\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-a^2 \eta}}{\eta^{1/2}} \frac{1}{1+\sigma \eta} d\eta = p_0 + 2 \sum_{n=1}^\infty (-1)^n p_n T_n^*(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

A sorfejtésben szereplő p_n együtthatót az alábbi egyszeres integrállal adhatjuk meg:

$$p_n = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-a^2 \eta}}{\eta^{1/2} (1+\eta)^{1/2}} \frac{\eta^n}{[1+(1+\eta)^{1/2}]^{2n}} d\eta.$$

A p_n számokkal felírt Csebisev sor konvergenciájának megállapításához szükséges ismerni p_n viselkedését $n \rightarrow \infty$ -re. A p_n számok integrálalakjára alkalmazva a Laplace-módszert, az alábbi eredményt nyertük:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln p_n}{n^{2/3}} = -3 \cdot a^{2/3} \quad a > 0.$$

Ebből a relációból következik, hogy a vizsgált Csebisev sor abszolút és / σ -ban/ egyenletesen konvergál. Megjegyezzük, hogy a $\sigma = 0$ körüli Taylor sor, amely az integrálalakból könnyen nyerhető, és ekvivalens az $x=\infty$ -hez tartozó aszimptotikus sorfejtéssel, nyilvánvalóan divergens.

Numerikusan a p_n számokat az alábbi képletek felhasználásá-

val számítottuk ki:

$$p_0 = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{a^2/2} K_0(a^2/2) ,$$

$$p_0 - p_1 = 2a^2 \left[\frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{a^2/2} K_1(a^2/2) + p_0 - 1 \right] ,$$

$$p_0 - p_1 - 3(p_1 - p_2) = 8a^2 [1 - p_0 - p_1] ,$$

$$(2n+1)(p_n - p_{n+1}) - 2(2n+3)(p_{n+1} - p_{n+2}) + (2n+5)(p_{n+2} - p_{n+3}) = 8a^2(p_{n+1} + p_{n+2}),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

A negyedik /a rekurziós/ képlet p_n integrál alakjának felhasználásával /parciális integrálással és egyéb elemi átalakításokkal/ nyerhető. A rövidség kedvéért ezektől a számításoktól eltekintünk.

Előzetes számítást végeztünk "a" megbecslésére fenti képleteink alapján. Azt találtuk, hogy $a = 2$ esetén a megfelelő Csebisev sorfejtésekkel körülbelül ugyanakkora tagszám mellett / $n = 12$ -nél/ viszonylag ugyanakkora pontosság érhető el, relative. Ezért az " a " = 2 választással végeztük el az approximációk számítását. A képletekben szereplő Bessel-függvények megfelelő értékeit Gray-Matthews [2] könyvéből vettük. Elvégezve a Csebisev polinomsor részletösszegének polinommal rendezését, az alábbi eredményeket nyertük:

$$\int_0^x e^{-u^2} du = x \left\{ \sum_{n=0}^{12} c_n t^{2n} + h_{12}(t) \right\} ; \quad 0 \leq t \leq 1 ,$$

$$\bar{h}_{12} = \max_{0 \leq t \leq 1} |h_{12}(t)| \sim 5 \cdot 10^{-12} ; \quad t = x/2 .$$

n	c_n
0	0,999999 999997 9
1	-1,333333 332609 2
2	1,599999 959092 0
3	-1,523808 610777 6
4	1,185174 552448 0
5	-0,775683 535001 6
6	0,437273 841049 6
7	-0,215707 181056 0
8	0,093476 673945 6
9	-0,034862 963097 6
10	0,010484 921139 2
1	-0,002211 027353 6
2	0,000237 397606 4

$$\int_x^\infty e^{-u^2} du = \frac{e^{-x^2}}{2x} \left\{ \sum_{n=0}^{12} d_n \sigma^n + k_{12}(\sigma) \right\}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1,$$

$$\bar{k}_{12} = \max_{0 \leq \sigma \leq 1} |k_{12}(\sigma)| \sim 2,5 \cdot 10^{-11}, \quad \sigma = \left(\frac{2}{x}\right)^2.$$

n	d_n
0	0,999999 999976
1	-0,124999 991359
2	0,046874 480435
3	-0,029284 375046
4	0,025474 449152
5	-0,027568 317952
6	0,032803 907789
7	-0,037339 446477
8	0,035896 551014
9	-0,026370 939290
10	0,013468 801434
1	-0,004197 449728
2	0,000596 430029

I r o d a l o m

- [1] Natanszon I.P.: Konstruktiv függvénytan. Akadémiai Kiadó Bp. 1952 /145/
- [2] Э.Грей и Г.Б.Метюз: Функции Бесселя. Изд.Иностр.Лит. Москва 1953

Érkezett: 1964 márc. 17.
KFKI Közl. 12. évf. 3. szám, 1964.

GAMMA-FÜGGVÉNYEK APPROXIMÁCIÓJÁNAK MEGHATÁROZÁSA A FAKTOR MÓDSZER ALAPJÁN

Irta: Németh Géza

Összefoglalás

A dolgozat 10 jegyre pontos approximációs képleteket ad meg az alábbi függvényekre:

$$\ln \Gamma(x), \quad \psi(x) = \{ \ln \Gamma(x) \}' ,$$

$$A(x,y) = \operatorname{Im} \{ \ln \Gamma(x+iy) \} , \quad B(x,y) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\Gamma'(x+iy)}{\Gamma(x+iy)} \right\} .$$

Polinom approximációkat készítettünk a gamma-függvények számításához. Ezek a függvények igen gyakran szerepelnek a matematika alkalmazásaiban, közülük néhányra polinom közelítés található [1] -ben.

Először a $\ln \Gamma(x)$ -t vizsgálva tekintsük integrál előállítását $x > 0$, [2] /:

$$\ln \Gamma(x) = (x-1/2) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} + \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+t^2} \ln \frac{1}{1-e^{-2\pi t}} dt .$$

A jobboldali integrált / $\sigma = 4/x$ jelöléssel/ könnyen a következő alakra hozhatjuk:

$$M(x) = \frac{\sigma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\sigma^2 t^2} \ln \frac{1}{1-e^{-8\pi t}} dt .$$

Mivel

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+\sigma^2 t^2} \ln \frac{1}{1-e^{-8\pi t}} dt \leq \int_1^{\infty} \ln \frac{1}{1-e^{-8\pi t}} dt \leq 6 \cdot 10^{-13} .$$

Ezért

$$M(x) = \frac{\sigma}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{1+\sigma^2 t^2} \ln \frac{1}{1-e^{-8\pi t}} dt + H^*(\sigma) ,$$

ahol

$$\max_{0 \leq \sigma \leq 1} |H^*(\sigma)| = \bar{H}^* = 2 \cdot 10^{-13} .$$

Mármost ez utóbbi kifejezésben $1/(1+\sigma^2 t^2) - t$ / $0 \leq \sigma t \leq 1$ / egy Csebishev-sorból számolt polinomapproximációval helyettesítjük:

$$\frac{1}{1+s^2} = \sum_{n=0}^{12} a_n s^{2n} + h_{12}(s), \quad \bar{h}_{12} = 2 \cdot 10^{-10}.$$

Ekkor azt kapjuk, hogy:

$$M(x) = \sum_{n=0}^{12} a_n \vartheta_n \sigma^{2n+1} + \frac{\sigma}{\pi} \int_0^1 h_{12}(\sigma t) \ln \frac{1}{1-e^{-8\pi t}} dt + H^*(\sigma),$$

$$\vartheta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^1 t^{2n} \ln \frac{1}{1-e^{-8\pi t}} dt.$$

Bebizonyítható, hogy $0 \leq n \leq 12$ esetén legfeljebb $5 \cdot 10^{-12}$ hibával

$$\vartheta_n \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} t^{2n} \ln \frac{1}{1-e^{-8\pi t}} dt.$$

Ezért ϑ_n kifejezhető $\zeta(n)$ értékeivel. $M(x)$ hibája így három részből adódik. Elvégezve a hibabecslést, $a_n \cdot \vartheta_n$ számítását, majd a tag-szám csökkentését Lánczos [3] módszerével, a következőt kaptuk:

$$\ln \Gamma(x) = (x-1/2) \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{48} N(x) + H, \quad x \geq 4,$$

$$N(x) = \sum_{n=0}^4 c_n (4/x)^{2n+1}, \quad \bar{H} \sim 5 \cdot 10^{-12}, \quad \ln \sqrt{2\pi} = 0,918938 533205.$$

A c_n számokat az I. táblázatban adjuk meg. Megjegyezzük, hogy az i-mént részletezett eljárás a faktor-módszer [4] egy egyszerű változata. A további approximációkat is ezzel a módszerrel határoztuk meg.

A $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ függvény esetében a $\ln \Gamma(x)$ -nél követett eljárással nyertük az alábbi approximációt:

$$\psi(x) = \ln x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{192} \sum_{n=0}^4 d_n (4/x)^{2n+2} + K,$$

$$\bar{K} \sim 3 \cdot 10^{-12}, \quad x \geq 4.$$

A d_n számokat a II. táblázatban adjuk meg.

Megjegyezzük, hogy $0 \leq x \leq 4$ tartományba eső x értékekre rekurzive nyerhetők $\ln \Gamma(x)$ és $\psi(x)$ értékei az alábbi képletek segítségével:

$$\ln \Gamma(x) = -\ln x + \ln \Gamma(x+1),$$

$$\psi(x) = -1/x + \psi(x+1).$$

A következőkben $A(x,y) = \text{Im}\{\ln \Gamma(x+iy)\}$ számításával fogunk foglalkozni. Az $A(x,y)$ függvény /lényegében $\ln \Gamma(x)$ integrál-előállí-

tásának segítségével/ az alábbi kifejezéssel adható meg:

$$A(x, y) = (x - 1/2) \operatorname{arctg} y/x - y \left[1 - \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right] + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} \left\{ \frac{1}{i} \ln \frac{1 - e^{-2\pi(x-iy)t}}{1 - e^{-2\pi(x+iy)t}} \right\} dt .$$

Feltételezve, hogy $x \geq 4$, megmutathatjuk, hogy a maradéktagot /az integrált/ két részre /0,1/ és /1, ∞ / -re bontva, itt is elhanyagolható az /1, ∞ / -hez tartozó rész:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+t^2} \left\{ \frac{1}{i} \ln \frac{1 - e^{-2\pi(x-iy)t}}{1 - e^{-2\pi(x+iy)t}} \right\} dt = -2 \int_1^{\infty} \frac{1}{1+t^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-2\pi x n t} \sin 2\pi n y t \right\} dt .$$

Abszolút értékre térve, az alábbi becslést kapjuk:

$$\left| \int_1^{\infty} \right| \leq \int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-2\pi x n t} dt = \int_1^{\infty} \ln \frac{1}{1 - e^{-2\pi x t}} dt \leq 6 \cdot 10^{-13}, \quad x \geq 4 .$$

Elvégezve a /0,1/ integrálra $\frac{1}{1+t^2}$ polinomközelítésének behelyettesítését, majd a t szerinti integrálást, az alábbi képletet nyertük:

$$A(x, y) = (x - 1/2) \operatorname{arctg} y/x - y \left[1 - \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right] - P(x, y) + H ,$$

$$P(x, y) = \frac{1}{48} \sum_{n=0}^7 p_n \left(\frac{16}{x^2 + y^2} \right)^{n+1/2} T_{2n+1} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \quad \bar{H} \sim 3 \cdot 10^{-11}, \quad x \geq 4 .$$

A $P(x, y)$ mennyiséget legegyszerűbben a Clenshaw-féle [5] rekurziós technika alapján számíthatjuk ki a következőképpen:

$$P(x, y) = \frac{1}{12} \frac{y}{x^2 + y^2} \left(\varrho_0 - \frac{16}{x^2 + y^2} \varrho_1 \right),$$

ahol ϱ_0 és ϱ_1 az alábbi sorozat tagjai:

$$\varrho_8 = 0, \quad \varrho_7 = p_7,$$

és $n = 6, 5, \dots, 0$ -ra

$$\varrho_n = \frac{32(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \varrho_{n+1} - \left(\frac{16}{x^2 + y^2} \right)^2 \varrho_{n+2} + p_n .$$

A p_n számokat a III. táblázatban adjuk meg.

Végezetül a $B(x, y)$ függvényt

$$B(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\Gamma'(x + iy)}{\Gamma(x + iy)} \right\}$$

az alábbi alakból kiindulva approximáltuk:

$$B(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \frac{x}{2(x^2 + y^2)} - \int_0^{\infty} \frac{t}{1+t^2} \left[\frac{1}{e^{2\pi(x+iy)t-1}} + \frac{1}{e^{2\pi(x-iy)t-1}} \right] dt .$$

Feltételezve, hogy $x \geq 4$, könnyen láthatóan a faktor-módszer alapján az alábbi eredményre jutunk:

$$B(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \frac{x}{2(x^2 + y^2)} + Q(x, y) + K, \quad x \geq 4,$$

$$Q(x, y) = \frac{1}{192} \sum_{n=0}^7 q_n \left(\frac{16}{x^2 + y^2} \right)^{n+1} T_{2n+2} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \quad \bar{K} \sim 5 \cdot 10^{-11}.$$

A $Q(x, y)$ mennyiséget ismét a Clenshaw-rekurzió segítségével számítjuk ki az alábbi módon:

$$Q(x, y) = \frac{1}{192} \left[b_0 + b_1 \frac{16(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right].$$

Az itt szereplő b_0 és b_1 az alábbi rekurzió képletek alapján számítható ki:

$$b_9 = 0, \quad b_8 = q_7, \quad q_{-1} \equiv 0,$$

és $n = 7, 6, \dots, 0$ -ra

$$b_n = \frac{32(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} b_{n+1} - \left(\frac{16}{x^2 + y^2} \right)^2 b_{n+2} + q_{n-1}.$$

A q_n számokat a IV. táblázatban adjuk meg.

Megjegyezzük, hogy $0 \leq x \leq 4$ esetére $A(x, y)$ és $B(x, y)$ a következő rekurzióval számolhatók ki:

$$A(x, y) = -\arctg y/x + A(x+1, y)$$

$$B(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2} + B(x+1, y).$$

Az $A(x, y)$ függvény az $x = l+1$ / $l \geq 0$ egész/ és $y = \eta$ helyettesítéssel a $\mathcal{A}(\eta)$ un. Coulomb-fázissal azonosítható [6].

T á b l á z a t o k

I.		II.	
n	c_n	n	d_n
0	0,9999999998	0	0,99999999995
1	-0,0020833320	1	-0,0062499863
2	0,0000371910	2	0,0001858976
3	-0,0000017109	3	-0,0000118695
4	0,0000001128	4	0,0000009545

III.		IV.	
n	p_n	n	q_n
0	0,999999 99981	0	0,999999 9998
1	0,002083 33319	1	0,006250 0000
2	0,000037 20224	2	0,000186 0112
3	0,000001 74371	3	0,000012 2059
4	0,000000 15396	4	0,000001 3855
5	0,000000 02177	5	0,000000 2390
6	0,000000 00441	6	0,000000 0562
7	0,000000 00115	7	0,000000 0153

I r o d a l o m

- [1] Werner H., Collinge R.: Chebyshev Approximations to the Gamma Functions. M.T.A.C. 14 /1960/
- [2] М.А. Евграфов: Асимптотические оценки и целые функции. Гос.Изд.Физ.Мат.Лит. Москва /1962/
- [3] С.Ланцош: Практические методы прикладного анализа. Гос.Изд.Физ.Мат.Лит. Москва /1961/
- [4] Németh G.: Construction of Approximations to Functions by the Factor Method. Mathematics of Computation /sajtó alatt/
- [5] Clenshaw C.W.: A note on the Summation of Chebyshev series. M.T.A.C. 9. /1955/
- [6] Melkanoff M.A., Saxon D.S., Nodvik J.S., Cantor D.G.: A Fortran program for Elastic Scattering Analyses with the Nuclear Optical Model. Univ. of California Press /1961/

Érkezett: 1964. márc. 17.
KFKI Közl. 12. évf. 3. szám, 1964.

DINAMIKUS MUNKAELLENÁLLÁSU EMITTERKÖVETŐ VIZSGÁLATA

Irta: Jávör András

Összefoglalás

A cikk a White-féle katódkövető tranzisztoros megvalósításával foglalkozik. Összehasonlítjuk a közönséges emitterkövetővel, valamint a két tranzisztort tartalmazó kaszkád emitterkövetővel. A vizsgálatot ki-, és bemenő impedanciára, áram-, feszültség-, valamint teljesítményerősítésre végezzük el. A dinamikus munkaellenállású emitterkövetőnél megvizsgáljuk a két tranzisztor szimmetrikus és aszimmetrikus vezérlését. Kimutatjuk, hogy az extrém kis kimenőellenállás létrehozásához speciális aszimmetrikus beállítás szükséges.

Bevezetés

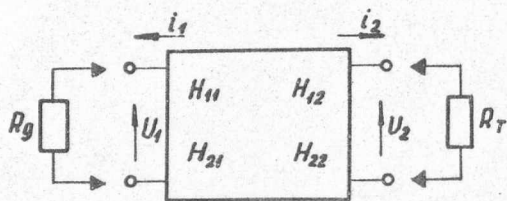
Elektroncsöves áramkörökben széleskörű alkalmazási lehetősége van az igen kis kimenőimpedanciát és lineáris jelátvitelt biztosító White-féle katódkövetőnek. Felvetődik a gondolat; hogy milyen eredményt érhetnénk el, ha tranzisztorokkal építenénk fel hasonló áramkört, létrehozva analógonját, a dinamikus munkaellenállású emitterkövetőt? Amikor azt a kérdést vizsgáljuk, hogy érdemes-e ezt az áramkört tranzisztorokra adaptálni, az összehasonlítást el kell végeznünk a közönséges emitterkövetőn kívül a két tranzisztort tartalmazó kaszkád emitterkövetőre is, megvizsgálva, hogy ezzel az ugyanannyi tranzisztort tartalmazó áramkörrel szemben van-e előnye a kapcsolásnak? Számításainkat h paraméterek segítségével végezzük el, a földelt emitteres paramétereket tekintve ismertnek.

Közönséges emitterkövető értékelése

Egy - H paraméterekkel jellemzett - négyfólusra, az 1. ábra szerinti mérőirányokkal felírható a következő két egyenlet:

$$U_1 = H_{11}i_1 + H_{12}U_2 \quad , \quad /1/$$

$$i_2 = H_{21}i_1 + H_{22}U_2 \quad . \quad /2/$$



1. ábra

Az áramerősítés

$$A_i = \frac{i_2}{i_1} = \frac{H_{21}}{1 + H_{22} R_T} \quad /5/$$

A feszültségerősítés

$$A_u = \frac{U_2}{U_1} = - \frac{H_{21} R_T}{H_{11} + \Delta H R_T} \quad /6/$$

A teljesítményerősítés

$$A_p = \frac{H_{21}^2 R_T}{1 + H_{22} R_T} \frac{1}{H_{11} + \Delta H R_T} \quad /7/$$

Ha a földelt emitteres paramétereket (h_{ik}) tekintjük adott-
nak, úgy ezekből meghatározhatjuk a földelt kollektoros kapcsolás pa-
ramétereit.

$$\begin{vmatrix} h_{11} & (1 - h_{12}) \\ -(h_{21} + 1) & h_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Ezeket beírva az általánosan H_{ik} -val jellemzett négypólusunk paraméterei helyébe megkapjuk a közöséges emitterkövetőre jellemző mennyiségeket.

$$R_{1e} \cong \frac{h_{11} + (h_{11} h_{22} + h_{21}) R_T}{1 + h_{22} R_T} \quad /8/$$

ha; $h_{12} \ll 1$. További elhanyagolásokat alkalmazva, gyakorlatban sokszor kielégítő közelítést ad, ha R_T elég nagy, a következő képlet

$$R_{1e} \cong h_{21} R_T \quad /9/$$

A kimenő ellenállás $h_{12} \ll 1$ és $h_{21} \gg 1$ közelítéssel:

$$R_{2e} \cong \frac{h_{11} + R_g}{h_{21} + h_{22} (R_g + h_{11})} \quad /10/$$

A nevező második tagját elhanyagolva további közelítést ad az

$$R_{2e} \approx \frac{h_{11} + R_g}{h_{21}} \quad /11/$$

egyenlet.

Az áramerősítés; $h_{21} \gg 1$ mellett;

$$A_i \approx \frac{h_{21}}{1 + h_{22} R_T} \quad /12/$$

A feszültségerősítés: $h_{11} h_{22} \ll h_{21}$ és $h_{12} \ll 1$ közelítésekkel a /13/ egyenletet kapjuk, ami $R_T h_{21} \gg h_{11}$ esetén láthatóan közel egységnyi feszültségerősítést ad.

$$A_u \approx \frac{h_{21} R_T}{h_{11} + h_{21} R_T} \approx 1 \quad /13/$$

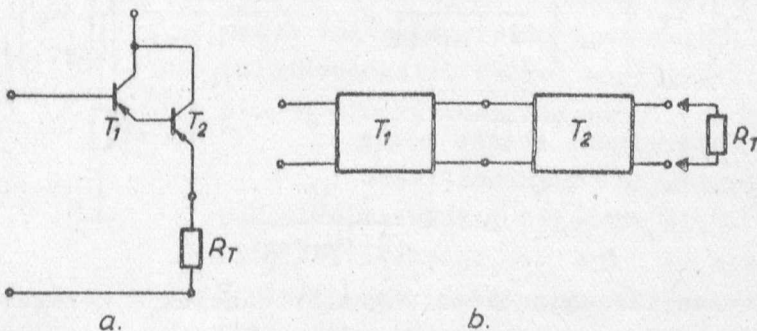
Végül a teljesítményerősítés közelítő értékét is megkaphatjuk $h_{21} R_T \gg h_{11}$ és a feszültségerősítés meghatározásánál tett közelítések alkalmazásával.

$$A_p \approx \frac{h_{21}}{1 + h_{22} R_T} \quad /14/$$

Látható, hogy a teljesítmény és áramerősítés értéke megegyezik, ami a feszültségerősítés közel egységnyi értéke miatt plausibilis.

Kaszád emitterkövető számítása

A második kapcsolás, amit meg kell vizsgálnunk a dinamikus munkaellenállású emitterkövetővel való egybevetés érdekében a kaszkád emitterkövető. Ez a kapcsolás ugyanis szintén megvalósítható két tranzisztorral, és bizonyos előnyöket nyújt a konvencionális emitterkövetővel szemben. A viszonylag bonyolult felépítésű dinamikus munkaellenállású emitterkövető alkalmazása tehát csak akkor látszik célszerűnek, ha az a két tranzisztorral ugyancsak megvalósítható kaszkád emitterkövetővel szemben is előnyös tulajdonságokkal rendelkezik. Ennek eldöntése érdekében vizsgáljuk meg ezt a kapcsolást is.



2. ábra

A 2/a ábrán látható kaszkád emitterkövető tulajdonképpen két kaszkádba kapcsolt négypólus, melyet a kimenő kapcsokon R_T ellenállással terhelünk. Az egyes négypólusok a T_1 ill. T_2 tranzisztorokat tartalmazzák földelt kollektoros kapcsolásban. Amennyiben a T_1 és T_2 kaszkádba kapcsolt négypólusok eredő paramétereit meghatározzuk, úgy a / 3, 4, 5, 6, 7 / egyenletek segítségével megkaphatjuk a szükséges eredményeket. A négypólus elmélet alapján [2] meghatározhatók ezen értékek [3]. Azzal az egyszerűsítő feltevessel, hogy a két négypólus paramétereire megegyeznek az eredő \mathcal{H} paraméterek az alábbiaknak adódnak.

$$\begin{array}{cccccc} \mathcal{H}_{22} & \Delta \mathcal{H} & \mathcal{H}_{12} & -\mathcal{H}_{21} & 1 & \mathcal{H}_{11} \\ \frac{H_{22}(1+\Delta H)}{1+H_{11}H_{22}} & \frac{\Delta H^2+H_{11}H_{22}}{1+H_{11}H_{22}} & \frac{H_{12}^2}{1+H_{11}H_{22}} & \frac{H_{21}^2}{1+H_{11}H_{22}} & 1 & \frac{H_{11}(1+\Delta H)}{1+H_{11}H_{22}} \end{array}$$

Helyettesítsük be a földelt emitteres paramétereket, melyekkel közelítőleg;

$$\begin{array}{lcl} H_{11} & \approx & h_{11} \\ H_{12} & \approx & 1 \\ H_{21} & \approx & h_{21} \\ H_{22} & \approx & h_{22} \\ \Delta H & \approx & h_{21} \end{array}$$

Itt ΔH meghatározásánál feltételeztük, hogy; $h_{21} \gg 1$; $h_{12} \ll 1$ és $h_{11}h_{22} \ll h_{21}$.

Figyelembe véve, hogy $h_{21} \gg 1$, a négypólus karakterisztika

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h_{21}h_{11}}{1+h_{11}h_{22}} & \frac{1}{1+h_{11}h_{22}} \\ \frac{h_{21}^2}{1+h_{11}h_{22}} & \frac{h_{22}h_{21}}{1+h_{11}h_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad /15/$$

A determináns értéke pedig

$$\Delta H \approx \frac{h_{21}^2}{1+h_{11}h_{22}} \quad /16/$$

Ezután már egyszerűen meghatározhatjuk a keresett jellemzőket az eredő négypólusra kapott eredményeket behelyettesítve a / 3, 4, 5, 6, 7./ egyenletbe.

Alkalmazzuk a $h_{11}h_{22} \ll 1$, $h_{21}R_T \gg h_{11}$ és $h_{21} \gg R_g h_{22}$ közelítéseket, akkor a következő, jól áttekinthető egyenleteket kapjuk

$$R_{1ke} \approx \frac{h_{21}^2 R_T}{1 + h_{21}h_{22}R_T} \quad / 17/$$

$$R_{2ke} \approx \frac{h_{11}}{h_{21}} + \frac{R_g}{h_{21}^2} \quad / 18/$$

$$A_{i_{ke}} \approx \frac{h_{21}^2}{1 + h_{22}h_{21}R_T} \quad / 19/$$

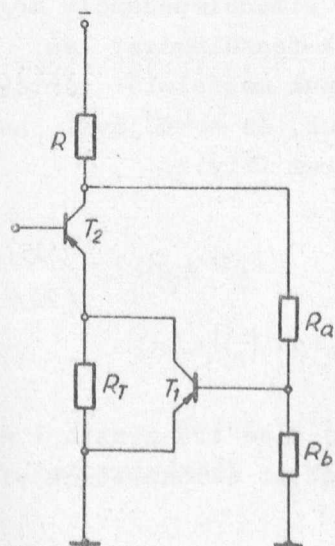
$$A_{u_{ke}} \approx \frac{h_{21}R_T}{h_{11} + h_{21}R_T} \approx 1 \quad / 20/$$

$$A_{p_{ke}} \approx \frac{h_{21}^2}{1 + h_{22}h_{21}R_T} \quad / 21/$$

Ezek után hozzáláthatunk tulajdonképpeni főfeladatunk, megoldásához, mivel az összehasonlítási alapot képező áramkörök analízisét elvégeztük.

Dinamikus munkaellenállású emitterkövető

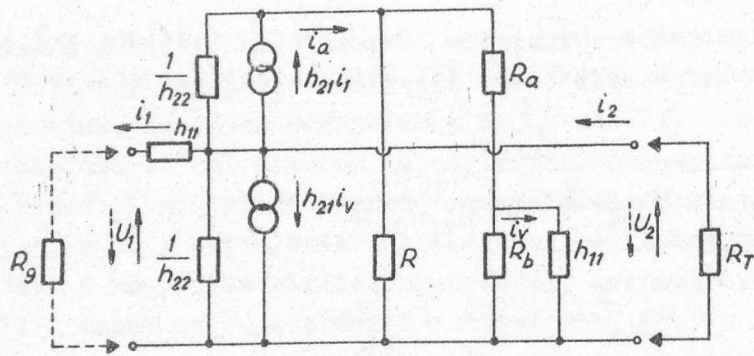
Az áramkör elvi kapcsolási rajzát a 3. ábra mutatja.



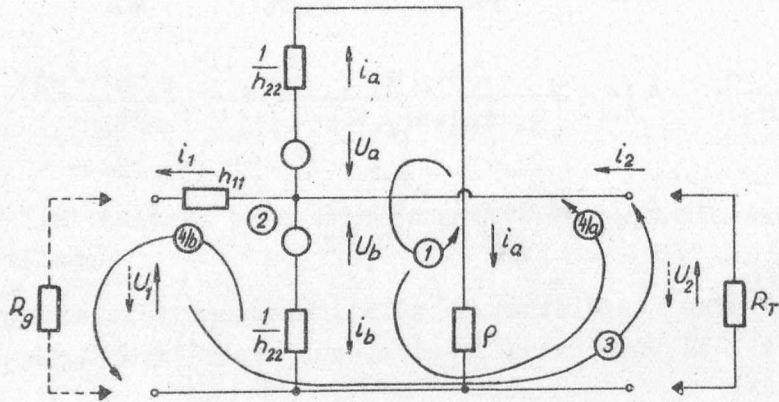
3. ábra

A gyakorlati kivitelek természetesen különbözőek lehetnek az egyenfeszültség beállítása szempontjából pl. R_a helyén alkalmazhatunk kondenzátort, vagy zenerdiódát is, kondenzátoros csatolásnál T_1 bázisát esetleg osztón keresztül beállítva a megfelelő munkapontba. Az ábrán látható kapcsolás azonban tartalmazza ezen változatoknak a váltakozó áramu szempontból lényeges tulajdonságait. Ezeket megkaphatjuk belőle pl. $R_a = 0$ extremizálással.

Számításainkat helyettesítő képek alkalmazásával végeztük el, egyszerűsítő feltételként $h_{12} = 0$ -t alkalmazva. Mindkét pozícióban azonos paraméterekkel jellemzett tranzisztorokat feltételezve a 4/a ábrán látható helyettesítő képhez ju-



a.



b.

4. ábra

tunk, ahol a szaggatott vonallal jelölt irányok a kimenőimpedancia meghatározásakor érvényesek, amikor a kimenetre adunk feszültséget és a bemenetet zárjuk le a fokozat meghajtóellenállásának megfelelő értékkel. Egyszerűsíthetjük a kapcsolást, ha összevonjuk, és eredőjével helyettesítjük azt az ellenállást, melyen az i_a áram folyik.

Az eredő értéke

$$\varrho = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_a + \frac{R_b h_{11}}{R_b + h_{11}}}} \quad / 22/$$

Nem szabad azonban elfelejtenünk, hogy az alsó tranzisztort vezérlő áram, mely h_{11} -en folyik át csak i_a -nak az ellenállások viszonya által megszabott hányada lesz.

Tehát

$$i_v = \lambda i_a, \quad / 23/$$

ahol

$$\lambda = \frac{RR_b}{RR_b + Rh_{11} + R_a R_b + R_a h_{11} + R_b h_{11}} \quad / 24/$$

Helyettesítsük továbbá a 4/a ábrán levő két Nortongenerátort a Thevenin ekvivalenciával úgy a 4/b ábra egyszerűbb helyettesítő ké-
péhez jutunk. A generátorok forrásfeszültsége

$$U_a = \frac{h_{21} i_1}{h_{22}} \quad / 25/$$

és

$$U_b = \frac{h_{21} \lambda i_a}{h_{22}} \quad / 26/$$

Írjuk fel az áramköri egyenleteket. Négy egyenletet kell fel-
írni a négy ismeretlennek megfelelően. Arra az esetre azonban, amikor
a kimenő ellenállást akarjuk meghatározni az egyenletek egy része
megváltozik. Itt u.i. a 4/b ábrán szaggatott vonallal ábrázolt irá-
nyok és csatlakozó áramköri részek érvényesek. Ez esetben a b/indexű,
míg az összes többi esetben az a/ indexű egyenletek érvényesek, míg
az index nélküli egyenletek minden esetre vonatkoznak. A 4/b ábrán a
hurkok és csomópontok számmal való jelölése utal a megfelelő egyenlet-
re. Az áramkörre felírható egyenletek, tehát rendezett alakban a kö-
vetkezők:

$$h_{21} i_1 - (h_{21} \lambda + h_{22} \varrho + 1) i_a + i_b = 0 \quad / 27/$$

$$-i_1 - i_a - i_b + i_2 = 0 \quad / 28/$$

$$h_{11} i_1 + R_T i_2 = U_1 \quad / 29/a/$$

$$-h_{21} \lambda i_a + i_b + R_T h_{22} i_2 = 0 \quad / 30/a/$$

$$(h_{11} + R_g) i_1 = U_2 \quad / 29/b/$$

$$(h_{11} + R_g) h_{22} i_1 + h_{21} \lambda i_a - i_b = 0 \quad / 30/b/$$

Írjuk fel az a/ jelű egyenleteket tartalmazó egyenletrendszer
determinánsát

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} h_{21} & -(h_{21} \lambda + h_{22} \varrho + 1) & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & +1 \\ h_{11} & 0 & 0 & R_T \\ 0 & -h_{21} \lambda & 1 & R_T h_{22} \end{vmatrix}, \quad / 31/$$

ami kifejtve és elvégezve az egyszerűsítéseket

$$\Delta_a = h_{11}[h_{22}\varrho + 1 + R_T h_{22}(h_{21}\lambda + h_{22}\varrho + 2)] + R_T[h_{21}(1 + h_{21}\lambda) + h_{22}\varrho + 1] \quad /32/$$

határozzuk meg ezután az i_1 ismeretlenhez tartozó determinánst

$$\Delta_{i_1} = \begin{vmatrix} 0 & -(h_{21}\lambda + h_{22}\varrho + 1) & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & +1 \\ u_1 & 0 & 0 & R_T \\ 0 & -h_{21}\lambda & 1 & R_T h_{22} \end{vmatrix}, \quad /33/$$

illetve

$$\Delta_{i_1} = u_1[\varrho + R_T(h_{21}\lambda + h_{22}\varrho + 2)] + 1. \quad /34/$$

A Cramer szabály szerint

$$i_1 = \frac{\Delta_{i_1}}{\Delta_a}. \quad /35/$$

A dinamikus munkaellenállású emitterkövető bemenő ellenállását megkapjuk, mint

$$R_{1de} = \frac{u_1}{i_1} = \frac{u_1 \Delta_a}{\Delta_{i_1}}, \quad /36/$$

$$R_{1de} = \frac{h_{11}[h_{22}\varrho + 1 + R_T h_{22}(h_{21}\lambda + h_{22}\varrho + 2)] + R_T[h_{21}(1 + h_{21}\lambda) + h_{22}\varrho + 1]}{h_{22}[\varrho + R_T(h_{21}\lambda + h_{22}\varrho + 2)] + 1}. \quad /37/$$

Számítsuk ki most az i_2 -höz tartozó determinánst.

$$\Delta_{i_2} = \begin{vmatrix} h_{21} & -(h_{21}\lambda + h_{22}\varrho + 1) & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ h_{11} & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & -h_{21}\lambda & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad /38/$$

illetve:

$$\Delta_{i_2} = -u_1[h_{21}(h_{21}\lambda + 1) + h_{22}\varrho + 1] \quad /39/$$

Az áramerősítést megkapjuk mint

$$A_{ide} = \frac{i_2}{i_1} = \frac{\Delta_{i_2}}{\Delta_{i_1}}, \quad /40/$$

azaz

$$A_{i_{de}} = \frac{h_{21}(h_{21}\lambda + 1) + h_{22}\varrho + 1}{h_{22}[\varrho + R_T(h_{21}\lambda + h_{22}\varrho + 2)] + 1} \quad /41/$$

A feszültség erősítés:

$$A_{u_{de}} = \frac{\Delta i_2}{\Delta} \frac{R_T}{u_1}, \quad /42/$$

$$A_{u_{de}} = \frac{[h_{21}(h_{21}\lambda + 1) + h_{22}\varrho + 1]R_T}{h_{11}[h_{22}\varrho + 1 + R_T h_{22}(h_{21}\lambda + h_{22}\varrho + 2)] + R_T[1 + h_{21}(1 + h_{21}\lambda) + h_{22}\varrho]} \quad /43/$$

A teljesítményerősítés az áram és feszültségerősítés szorzataként

$$A_{P_{de}} = A_{u_{de}} A_{i_{de}} \quad /44/$$

Az analóg csöves áramkörnél a szimmetrikus vezérlésre meg lehet határozni a felső pozícióban levő cső munkaelenállásának optimális értékét. Tranzisztoros esetre, mivel itt nem feszültséggel, hanem árammal vezéreljük az alsó tranzisztort, célszerű az optimális λ_{opt} árameloszlási tényezőt kiszámítani. Ebben az esetben mindkét tranzisztor a kimenőáram felét szolgáltatja. Irhatjuk tehát, hogy

$$i_b = \frac{1}{2} i_2 \quad /45/$$

A determinánsokat helyettesítve

$$\frac{\Delta i_2}{\Delta i_b} = 2, \quad /46/$$

ahol

$$\Delta i_b = \begin{vmatrix} h_{21} & -(h_{21}\lambda + h_{22}\varrho + 1) & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & +1 \\ h_{11} & 0 & u_1 & R_T \\ 0 & -h_{21}\lambda & 0 & R_T h_{22} \end{vmatrix}, \quad /47/$$

illetve

$$\Delta i_b = u_1 \{ h_{21}^2 \lambda - R_T h_{22} [(\lambda + 1) h_{21} + h_{22}\varrho + 1] \} \quad /48/$$

Behelyettesítve a/46/ egyenletbe

$$\frac{h_{21}(h_{21}\lambda + 1) + h_{22}\varrho + 1}{h_{21}^2 \lambda - R_T h_{22} [(\lambda + 1) h_{21} + h_{22}\varrho + 1]} = 2 \quad /49/$$

Kifejezve λ -t

$$\lambda_{\text{opt}} = \frac{(h_{21} + h_{22}\varrho + 1)(1 + 2R_T h_{22})}{h_{21}(h_{21} - 2R_T h_{22})} \quad /50/$$

Láthatjuk, hogy λ -ra különböző terheléseknél nem kapunk minden esetben fizikailag megvalósítható értéket, hiszen előfordulhat, hogy negatív vagy 1-nél nagyobb érték adódik λ -ra, ha R_T értéke elég nagy, ezért /50/-ből meghatározhatjuk R_T -nek azt a maximális értékét, melynél $\lambda = 1$, azaz, ami még a megvalósíthatóság elvi határa

$$R_{T_{\text{max}}} = \frac{h_{21} \left[h_{21} - 1 - \frac{h_{22}\varrho + 1}{h_{21}} \right]}{2h_{22} [2h_{21} + h_{22}\varrho + 1]} \quad /51/$$

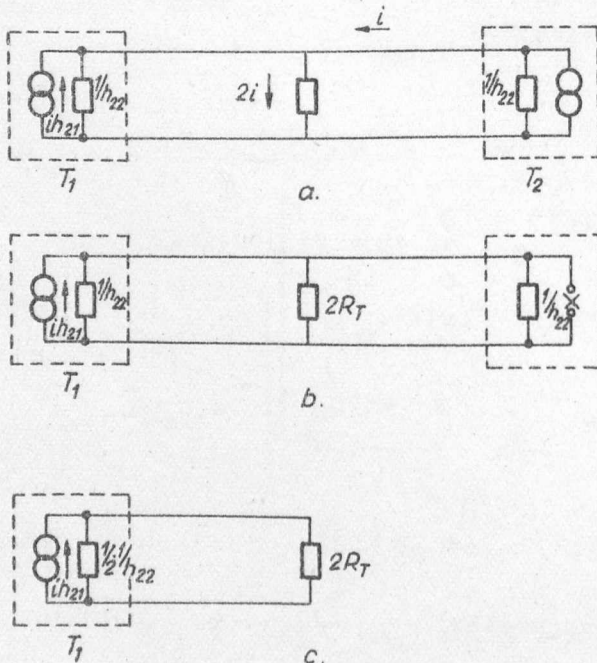
Nézzük meg kissé közelebbről fizikailag ezt a problémát. Elég nagy h_{21} esetén, gyakorlatilag felírható közelítőleg, hogy

$$R_{T_{\text{max}}} \approx \frac{h_{21}}{4h_{22}} \quad /52/$$

átrendezve

$$2R_{T_{\text{max}}} \approx \frac{1}{2} \frac{1}{h_{22}} h_{21} \quad /53/$$

A közelítő összefüggésnek megfelelő fizikai kép az 5/a ábrán



5. ábra

látható. A két generátor szimmetrikusan táplálja az R_T ellenállást, az alsó (T_1) tranzisztor pedig $\lambda \approx 1$ miatt i árammal lesz vezérelve. Az 5/b ábrán az egyik generátort elhagytuk, tehát fele áram folyik a terhelő ellenálláson, de hogy a viszonyok ne változzanak a terhelő ellenállás kétszeresére terhelte a T_1 generátort. A 5/c ábrán további átrendezés után a kapott generátor forrásárama úgy kell, hogy eloszoljon a két párhuzamos ellenálláson, hogy az R_T ellenálláson csak i áram folyjon át az $i \cdot h_{21}$ -ből. Így a generátor belső ellenál-

lásának kerekén h_{21} -szerese kell, hogy legyen, a terhelő ellenállás, vagyis megkapjuk az /53/ egyenletet feltételként.

Térünk rá ezután a kimenőellenállás meghatározására. Ehhez írjuk fel az egyenletrendszer determinánsát, de most a $b/$ jelű egyenletekkel

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} h_{21} & -(h_{21}\lambda + \rho h_{22} + 1) & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & +1 \\ h_{11} + R_g & 0 & 0 & 0 \\ (h_{11} + R_g)h_{22} & h_{21}\lambda & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad /54/$$

azaz

$$\Delta_b = -(h_{11} + R_g)(\rho h_{22} + 1). \quad /55/$$

Az i_2 -höz tartozó determináns

$$\Delta_{i_2} = \begin{vmatrix} h_{21} & -(h_{21}\lambda + \rho h_{22} + 1) & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ h_{11} + R_g & 0 & 0 & u_2 \\ (h_{11} + R_g)h_{22} & h_{21}\lambda & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad /56/$$

kifejtve

$$\Delta_{i_2} = -u_2 \{ h_{21}(1 + h_{21}\lambda) + (h_{21}\lambda + \rho h_{22} + 2)[1 + (h_{11} + R_g)h_{22}] \}. \quad /57/$$

Mivel a Cramer szabály szerint

$$i_2 = \frac{\Delta_{i_2}}{\Delta}. \quad /58/$$

A kimenőimpedanciát megkapjuk, mint;

$$R_{2de} = \frac{\Delta}{\Delta_{i_2}} u_2. \quad /59/$$

Behelyettesítve /59/-be /55/-öt és /57/-et.

$$R_{2de} = \frac{(h_{11} + R_g)(\rho h_{22} + 1)}{h_{21}(1 + h_{21}\lambda) + (h_{21}\lambda + \rho h_{22} + 2)[1 + (h_{11} + R_g)h_{22}]}. \quad /60/$$

A fokozat beállításának szempontjai

Miután meghatároztuk a keresett jellemző mennyiségeket a kap-

csolásra vonatkozóan, térjünk vissza még egyszer λ értékének megválasztására. Látható, hogy ez erősen függ a terhelő ellenállás értékétől. Alkalmazzunk most egy közelítést, mely igen sok gyakorlati esetben érvényes.

$$\text{Legyen} \quad h_{21} \gg 1, \quad h_{22} \ll 1 \quad \text{és} \\ 2R_T h_{22} \ll 1.$$

Akkor az /50/ egyenlet közelítőleg

$$\lambda_{\text{opt}} \cong \frac{1}{h_{21}} \quad /61/$$

lesz. Ez tehát a szimmetrikus kivezérlés feltétele. Egészítsük ki fenti feltételeinket még

$$\frac{h_{11}}{h_{21}} \ll R_T \quad \text{és} \quad (h_{11} + R_g) h_{22} \ll 1 \quad -\text{el.}$$

Akkor megkapjuk szimmetrikus beállításra a kívánt értékeket, ha végrehajtjuk a megfelelő elhanyagolásokat a /37, 41, 43, 44 és 60 / egyenletben.

$$\text{Igy;} \quad R'_{i_{de}} \cong 2R_T h_{21} \quad /62/$$

$$A'_{i_{de}} \cong 2h_{21} \quad /63/$$

$$A'_{u_{de}} \cong 1 \quad /64/$$

$$A'_{p_{de}} \cong A_{i_{de}} \quad /65/$$

$$R'_{2_{de}} \cong \frac{h_{11} + R_g}{2h_{21}} \quad /66/$$

Összehasonlítva a kapott eredményt a konvencionális emitterkövetővel a / 9, 11, 12, 13, 14 / egyenletekből látható, hogy egy kettes faktor a nyereség, azaz gyakorlatilag, olyan emitterkövetővel ekvivalens a dinamikus munkaellenállású emitterkövető, melynél h_{21} -et a kétszeresére növeljük. Összehasonlítva a kaszkád emitterkövetővel, amennyiben $h_{22} h_{21} R_T \ll 1$ -et feltételezünk, úgy a /17, 18, 19, 20 és 21 / egyenletet vizsgálva megállapíthatjuk, hogy bemenőellenállás, áram, és teljesítményerősítés szempontjából előnyösebb a kaszkád emitterkövető, mivel ott h_{21}^2 szerepel $2h_{21}$ helyett. A feszültségerősítés ott is hasonló. Kimenő ellenállás szempontjából a helyzet nem

egyértelmű. Ugyanis, ha összehasonlítjuk a / 18 és 66 / egyenletet, látható, hogy bár a meghajtó generátor ellenállásából adódó részt h_{21} -szer nagyobb mértékben csökkenti, mint a dinamikus munkaellenállású emitterkövető, h_{11} -et viszont csak fele annyira. Nyilvánvaló, hogy egyik esetben sem lehet extrém kis kimenőellenállást megvalósítani, hiszen még 0 generátor-ellenállás mellett sem csökkenhet

$$\frac{h_{11}}{h_{21}}, \quad \text{ill.} \quad \frac{h_{11}}{2h_{21}} \quad \text{érték alá}.$$

Vizsgáljuk meg ezután a dinamikus emitterkövető egy másik lényeges beállítási módját, amikor legyen

$$\lambda \cong 1. \quad /67/$$

Ez esetben - fenti elhanyagolásokkal - a következő értékek adódnak

$$R_{1de} \cong \frac{R_T h_{21}^2}{1 + h_{22} R_T h_{21}} \quad /68/$$

$$A_{ide} \cong \frac{h_{21}^2}{h_{21} h_{22} R_T + 1} \quad /69/$$

$$A_{ude} \cong 1 \quad /70/$$

$$A_{pde} \cong A_{ide} \quad /71/$$

$$R_{2de} \cong \frac{h_{11} + R_g}{h_{21}^2} \quad /72/$$

Ennél a beállításnál a konvencionális emitterkövetővel szemben az előny plausibilis, hiszen h_{21} helyett h_{21}^2 szerepel a kifejezésekben. A kaszkád emitterkövetővel való összehasonlításnál kitűnik, hogy a kimenőellenállástól eltekintve, az általunk vizsgált jellemző mennyiségek tekintetében a két kapcsolás egyenértékű. A lényeges különbség a kimenő ellenállás értékében van ugyanis a dinamikus munkaellenállású emitterkövetőnél a h_{11} -ből adódó rész is h_{21}^2 -

szeresen csökken és így lehetővé válik igen kis kimenőimpedanciák megvalósítása, ami a kaszkád vagy konvencionális emitterkövetőnél nem lehetséges.

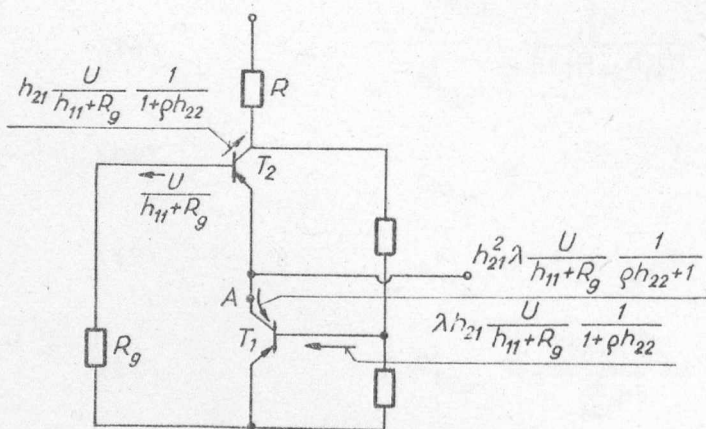
A kis kimenőimpedancia vizsgálata fizikai szempontból

Kiséreljük meg a kis kimenőimpedanciát létrehozó mechanizmusnak közelítő fizikai képét meghatározni. Írjuk fel a /60/ egyenletet kissé más alakban.

$$R_{2de} = \frac{1}{\frac{1}{(h_{11}+R_g)(\varphi h_{22}+1)} + \frac{1}{(h_{11}+R_g)(\varphi h_{22}+1)} + \frac{1}{(h_{11}+R_g)(\varphi h_{22}+1)} + \frac{1}{1 \cdot \varphi h_{22}+1} + \frac{1}{h_{11}+R_g} + \frac{1}{h_{22}}} \quad /73/$$

Látható, hogy a kimenőimpedancia párhuzamosan kapcsolódó impedanciák eredőjeként számítható. Fenti közelítéseinkkel $\lambda \cong 1$ esetre az első tag lesz a legkisebb és a többi első közelítésben elhanyagolhatjuk mellette. Próbáljuk meg értelmezni ezt a domináló tagot.

Válasszuk a kapcsolást - melyet a 6. ábra szemléltet - A ponton gondolatban ketté. U feszültség hatására T_2 bázisán $\frac{U}{h_{11}+R_g}$ áram folyik, h_{21} áramerősítésű és φ effektív kollektor ellenállást látó tranzisztor árama



6. ábra

$h_{21} \frac{U}{h_{11}+R_g} \frac{1}{\varphi h_{22}+1}$ lesz.
 T_1 bázisárama ennek λ -szorososa lesz: kollektorárama pedig ennek h_{21} - szerese.

Azaz

$$i = U \frac{h_{21}^2}{(h_{11}+R_g)(\varphi h_{22}+1)} \quad /74/$$

A zárójelben levő kifejezés nem más mint a visszacsatoló lánc transzfer konduktanciája. Ez viszont megegyezik a /73/ egyenletben lévő tört nevezőjének első - már említett - tagjával.

Láthatjuk tehát, hogy az extrém kis impedancia létrehozásának fizikai mechanizmusa valóban igen jó analógiát mutat a csöves áramkörrel, hiszen ugyan ez ott is kimutatható [4].

Végül vizsgáljuk meg, hogy gyakorlati szempontból milyen következtetéseket vonhatunk le a számítások eredményeiből. A gyakorlatban elterjedt tranzisztoroknál $10\ \Omega$ nagyságrendű kimenő ellenállást elérhetünk kaszkád emitterkövetővel, ill. kis generátor ellenállás esetén az egyszerű emitterkövetővel is. Amennyiben ennél kisebb értékű kimenő ellenállás szükséges, úgy dinamikus munkaellenállású emitterkövetővel $1\ \Omega$ nagyságrendű vagy annál kisebb értéket valósíthatunk meg. Ez esetben olyan beállítás szükséges, hogy $\lambda \cong 1$ legyen, ami azt jelenti, hogy a 3. ábrán látható R , R_a és R_b ellenállásokat úgy méretezzük, hogy T_2 tranzisztor kollektor váltakozó árama gyakorlatilag teljes egészében T_1 bázisát vezérelje. Például nézzük meg az OC1071 tranzisztorra adódó értékeket

$$\begin{aligned} h_{11} &= 0,8\ \text{k}\Omega \\ h_{21} &= 47 \\ h_{22} &= 80\ \mu\text{A/V} \\ h_{12} &= 5,4 \cdot 10^{-4} \\ R_g &= 1\ \text{k}\Omega \end{aligned}$$

A kimenő ellenállás értéke:

a/ közönséges emitterkövetőnél

$$R_{2e} \cong 38\ \Omega$$

b/ kaszkád emitterkövetőnél

$$R_{2ke} \cong 17\ \Omega$$

c/ dinamikus munkaellenállású emitterkövetőnél / $\lambda \cong 1$ /

$$R_{2de} \cong 1,2\ \Omega$$

I r o d a l o m

- [1] Shea R.F.: Transistor circuit engineering. John Wiley and Sons, Inc., New York 1957.
- [2] Henneyey Z.: Lineáris áramkörök elmélete. Akadémiai Kiadó Budapest, 1958.
- [3] Hunter L.P.: Handbook of semiconductor electronics. McGraw-Hill, New York Toronto - London 1956.
- [4] Jávör A.: White féle katódkövető vizsgálata. KFKI Közl. 11, 2 1963.

Érkezett: 1964. márc. 28.

KFKI Közl. 12. évf. 3.szám, 1964.

Fe-Rh ÖTVÖZET ELŐÁLLÍTÁSA POR ALAKBAN, KÉMIAI MÓDSZERREL

Irta: Konczos Géza és Takács János

Összefoglalás

Fe-Rh ötvözetek kémiai módszerrel történő előállítását ismertetjük. Megfelelően leválasztott $\text{Fe}/\text{OH}/_3$ és $\text{Rh}/\text{OH}/_3$ csapadék 900 $^{\circ}\text{C}$ -on 1 óra hossza tartó izzításával FeRhO_3 oxidot állítottunk elő. Az oxid hidrogén gázban 800 $^{\circ}\text{C}$ -on 1 óra hosszat történő redukciójával finom szemcséjű FeRh ötvözetet nyertünk. A módszert 25-75 at% koncentráció tartományban alkalmaztuk. - Az FeRhO_3 oxid kialakulását termogravimetriás módszerrel tanulmányoztuk.

1. Bevezetés

A fémfizikai vizsgálatokhoz gyakran szükséges a vizsgálandó anyagot finom por alakjában előállítani /röntgen- és neutrontdiffrakciós vizsgálatok stb./. A porok előállítására mechanikai módszerek /őrlés, reszelés/ számos rideg fém és ötvözet esetében alkalmazható, ha két kellemtelen következmény: az anyag elszennyeződése, illetve a mechanikai hatás következtében beálló rácstorzulás a későbbiek során nem okoz zavart. Ha a kis szemcsenagyság mellett a nagy tisztaság is követelmény, akkor előnyösebb a fémporok előállítására kémiai módszert választani /redukciós, illetve elektrolitikus eljárást/[1] .

Míg fémporok előállítására általánosan alkalmaznak kémiai módszereket [2], addig ötvözetek por alakban történő elkészítésére csak kevés adatot találunk az irodalomban [2] . A leírt módszerek közös vonása az, hogy először elkészítik az ötvözet komponenseit tartalmazó megfelelő vegyületet /oxalát, formiát, oxid, amalgám stb./ és ennek megbonthatásával /redukció, Hg elűzése stb./ közvetlenül por alakban kapják meg a kívánt ötvözetet. A redukciós eljárás alkalmazásával állítottak elő Linl és munkatársai [3, 4] Co-Fe, Co-Ni és Fe-Ni ötvözeteket.

A kémiai módszerek alkalmazása az ötvözetek por alakjában történő előállítására számos előnnyel jár. Elmaradnak az ötvözés problémái /az olvadék reakciói a tégelyanyaggal, az ötvözetet alkotó fémek szegregációja megszilárduláskor stb./ és az anyagot homogénen, mechanikai fe-

szültségtől mentesen kapjuk meg. A módszert főleg kísérleti vizsgálatoknál lehet jól felhasználni, ahol aránylag kis mennyiségű, de nagyon tiszta és jól definiált fémporok szükségesek.

Dolgozatunkban az Fe-Rh ötvözetporok előállítására kidolgozott eljárásunkat ismertetjük. Ezen ötvözetek redukciós módszerrel történő előállítására de Bergevin és Muldawer [6] utalt először. Későbbi cikkekben csak annyi részletet közölnek, hogy a porokat egy illmenit típusu $\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot \text{Rh}_2\text{O}_3$ oxid hidrogén gázban, 350-500 $^\circ\text{C}$ -on történő redukciójával kapták [7]. A kémiai módszerrel és az olvasztásos ötvözéssel előállított azonos összetételű ötvözetek rácsállandója jól egyezett.

2/ Az ötvözetporok előállítása

A Fe-Rh porok előállításánál lényegében de Bergevin és Muldawer [6] redukciós módszerét követtük.

1/ Rh és Fe törzsoldatok előállítása.

A Rh ásványi savakban nem oldódik, csak feltárással vihető oldatba. Az irodalomban leírt módszerek közül a klóros feltárást választottuk [8]. A rendelkezésre álló Rh port /Rh: 99,67%, Pt: 0,08% Fe: 0,011%/ kvarc csökelemencében 800-850 $^\circ\text{C}$ -on klóroztuk. A kapott, vízben oldhatatlan vörös RhCl_3 -at NaCl -dal eldörzsöltük és újabb klórozással 700-750 $^\circ\text{C}$ -on 30 perc alatt, vízben jól oldódó $\text{Na}_3/\text{RhCl}_6$ -tá alakítottuk át. A kitermelés 94 %-os volt.

A kapott terméket vízben oldottuk, szűrőssel elválasztottuk a fel nem táródott Rh-ot, majd törzsoldatot készítettünk belőle. Az oldat Rh tartalmát a Treadwell [9] által leírt gravimetriás módszerrel határoztuk meg $\pm 0,3$ %-os relatív hibával.

Az egyes Fe-Rh minták előállításához a Rh törzsoldat aliquot részéhez adtuk a szükséges vasat, FeCl_3 oldat alakjában. Utóbbit spektroszkópos tisztaságú vas /Johnson-Matthey/ HCl p.a.-ban történő oldásával állítottuk elő.

2/ A hidroxidok lecsapása.

A hidroxidok lecsapásánál arra törekedtünk, hogy a vas/III/- és rhódium/III/hidroxid leválása lehetőleg egyszerre történjék meg. Így kívántunk megelőzni esetleges koncentráció inhomogenitásokat a későbbi FeRhO_3 -ban és az ötvözetben. A külön leválás lehetősége abból adódik, hogy a $\text{Fe}/\text{OH}/_3$ már pH 2-nél, a $\text{Rh}/\text{OH}/_3$ viszont csak pH 6-nál kezd leválni [10]. Amennyiben tehát a vas/III/- és rhódium/III/hidroxidot egyszerre akarjuk leválasztani, olyan lecsapási módot kell alkalmaznunk, a-

melynél a pH változás gyorsan történik.

A hidroxidok lecsapására először szobahőmérsékleten telített NaHCO_3 oldatot próbáltunk ki, amelyet a Rh gravimetriás meghatározásánál használnak [9]. Ezzel a lecsapószerrel a $\text{Rh}/\text{OH}/_3$ csak lassan, 20-30 perces forralással választható le kvantitativ. Tapasztalataink szerint sokkal előnyösebb 5%-os NaOH oldatot használni, mivel ezzel mindkét hidroxid leválasztása pillanatszerűen történhet, forrásban levő oldat esetén. A lecsapás végén az oldat pH-ját ellenőrizzük, hogy a nagy lug felesleget elkerüljük.

Az oldatot leszűrjük, majd a szűrletben kvalitatív kémiai reakciókkal ellenőriztük a Rh, illetve a Fe leválasztás teljességét.

Megjegyezzük, hogy a NaOH oldattal leválasztott Fe- illetve Rh hidroxidok mindig tartalmaznak adszorptíve kötött Na^+ ionokat, amelyek oxiddá izzításkor nem távoznak el. Esetünkben ez nem zavart, mivel az eljárás későbbi lépésében a megmaradt lug könnyen eltávolítható volt.

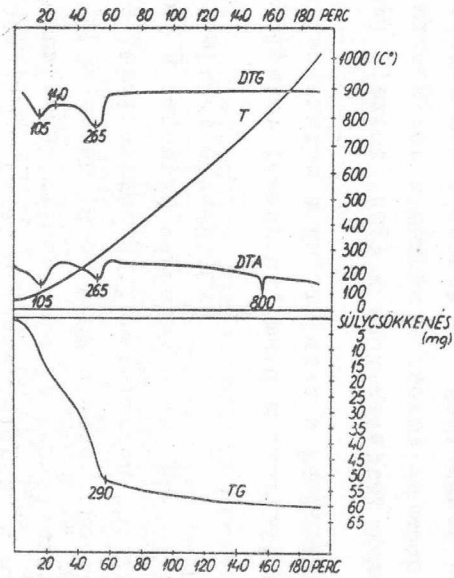
3/ A FeRhO_3 kialakítása.

A fent leírt módon készített $\text{Fe}/\text{OH}/_3$. $\text{Rh}/\text{OH}/_3$ redukciójával közvetlenül Fe-Rh ötvözet porhoz juthatnánk. A homogenitás növelése érdekében előnyösebb a hidroxidot előbb oxiddá izzítanunk.

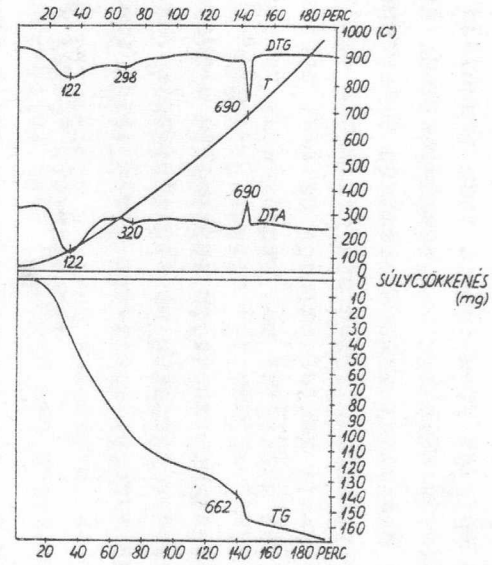
Mivel az irodalomban nem találtunk adatokat a FeRhO_3 kialakítására, az oxiddá izzítás körülményeinek tisztázására megvizsgáltuk az együtt lecsapott vas/III/-rhódium/III/hidroxid csapadék termogravimetriás viselkedését. A derivatogrammok felvétele a Paulik F., Paulik J., Erdey L. féle "Derivatograph"-on történt. A leválasztott hidroxidokat mérés előtt acetonnal öblítettük, majd 10^{-2} Hg mm-es vákuumban szárítottuk szobahőfokon. A vas/III/-rhódium/III/ vegyes hidroxid derivatogrammjának /3. ábra/ értelmezéséhez felvettük a 2. pontban leírt módszerrel külön-külön leválasztott $\text{Fe}/\text{OH}/_3$ és $\text{Rh}/\text{OH}/_3$ termogravimetriás görbéit is /1. és 2. ábra/.

A $\text{Fe}/\text{OH}/_3$ és $\text{Rh}/\text{OH}/_3$ derivatogramjai az alábbi folyamatokat jelzik:

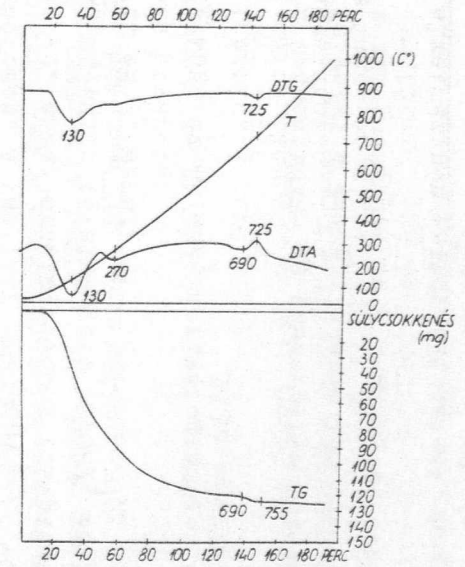
- 1/ A mechanikusan és abszorptíve kötött víz eltávoztása. Ez a folyamat a $\text{Fe}/\text{OH}/_3$ esetén 105°C -on, $\text{Rh}/\text{OH}/_3$ esetén 122°C körül játszódik le a legnagyobb sebességgel.
- 2/ A DTA és DTG görbék azt jelzik, hogy a hidroxidok vizének elvesztése $\text{Fe}/\text{OH}/_3$ -nál 265°C , $\text{Rh}/\text{OH}/_3$ -nál 298°C -nál történik a legnagyobb sebességgel.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

3/ A $\text{Fe}/\text{OH}/_3$ DTA görbájén egy endoterm, súlyváltozás nélküli folyamat figyelhető meg $800\text{ }^\circ\text{C}$ -on. A $\text{Rh}/\text{OH}/_3$ derivatogramja $690\text{ }^\circ\text{C}$ -on mutat egy súlyváltozással járó exoterm folyamatot.

Az együtt leválasztott vas/III/-rhódium/III/hidroxid esetében a derivatogramm /3. ábra/ jellegzetes hőmérsékletei elég jól egyeznek a $\text{Fe}/\text{OH}/_3$ és a $\text{Rh}/\text{OH}/_3$ megfelelő pontjaival. A minimumok-maximumok nem olyan élesek, mint a tiszta $\text{Fe}/\text{OH}/_3$, illetve a $\text{Rh}/\text{OH}/_3$ esetében. Ez azt mutatja, hogy a vegyes hidroxid esetén a vízvesztés folyamata késő elhúzódottan játszódik le. A 3. ábrából jól látható, hogy a FeRhO_3 oxid kialakulása $760\text{ }^\circ\text{C}$ körül fejeződik be.

A derivatogramok alapján a FeRhO_3 oxid elkészítésére az alábbi eljárást követtük. Az együtt lecsapott vas/III/-rhódium/III/hidroxidot szűrés után $120\text{ }^\circ\text{C}$ -on szárítottuk 2-3 óra hosszat, majd csökemencében, MgO téglában $900\text{ }^\circ\text{C}$ -on 1 óra hosszat izzítottuk. A kapott sötétbarna színű anyag jól poritható.

4/ Redukció.

Az előállított vegyes oxidot hidrogén áramban, csökemencében redukáltuk. Megfigyelésünk szerint $500\text{ }^\circ\text{C}$ felett 1 órás redukcióval, ezüstösfényű por alakban nyerjük az ötvözetet, az alacsony hőfokon redukált porok gyakran szürkés-fekete színűek. Kísérleteink nagy részénél $800\text{ }^\circ\text{C}$ -on 1 óra hosszat redukáltuk az oxidot. Bertaut és munkatársai [7] alacsonyabb hőfokon $350\text{--}500\text{ }^\circ\text{C}$ -on végezték a redukciót.

Lényeges szinterelődést nem tapasztaltunk. Redukció után a port hig sósavval mostuk, a lecsapószerből maradt lug eltávolítása céljából, /lásd II./2 fejezet/.

3/ Eredmények

A fent leírt módszerrel eddig több mint 30 db. különböző összetételű Fe-Rh ötvözetet készítettünk. A legkisebb Rh koncentráció: 25,0, a legnagyobb : 75,0 at% Rh volt. A porok Debye-Sherrer felvétele egyértelműen igazolta a homogén ötvözetfázis kialakulását. A porokon végzett röntgendiffrakciós és neutrondiffrakciós mérések a Fe-Rh rendszer állapotábrájához szolgáltatott új adatokat. Ezen mérések eredményeit Krén és munkatársai [11] dolgozata ismerteti.

4/ A módszer alkalmazásának lehetőségei

F. Lihl [4] szerint az ötvözetek előállításának redukációs módszere csak akkor alkalmazható, ha

I r o d a l o m

- [1] Eisenkolb F.: Fortschritte der Pulvermetallurgie, Band I. Akad. Verlag, Berlin, 1963.
- [2] Goetzel C.G.: Treatise on Powder Metallurgy, 1. köt. Interscience Publ., Inc., New York 1949.
- [3] Lihl F., Wagner H. és Zensch P.: Z.El. Chem. 56, 619 /1952/
- [4] Lihl F.: Metalle 5, 183 /1951/
- [5] Lihl F.: Z. Metallkde 46, 434 /1955/
- [6] de Bergevin F., Muldower L.: Compt. rend. 252, 1347 /1961/
- [7] Bertaut P., de Bergevin F. és Roult G.: Compt. rend. 256, 1688 /1963/
- [8] Fresenius W., Jander G.: Handbuch der anal. Chemie, II. Teil, VIII. b./3. Springer Verlag, Berlin 1951. 82-103.
- [9] Treadwell W.D.: Tabellen und Vorschriften zur quantitativen Analyse. Dentike Verl., Leipzig-Wien 1938. 96.
- [10] Erdey L.: A kémiai analízis sziszterinti módszerei. I. köt. Akad. Kiad. 1960. 214.
- [11] Krén E., Paróczy J. és Szabó P.: KFKI Közl. 12, 17 /1964/
- [12] Náray-Szabó I.: Kristálykémia. Egyetemi Nyomda Bp. 1944.

Érkezett: 1964. márc. 25.

KFKI Közl. 12.évf. 3. szám, 1964.

KISMENNYISÉGŰ URÁN MEGHATÁROZÁSA DIBENZOILMETÁNNAL SPEKTROFOTOMETRIKUS UTON

Irtta: Bakos László és András László

Összefoglalás

Megállapítottuk, hogy

1/ savanyú és semleges szerves foszforvegyületek egyidejű jelenlétében a vas vegyületek zavarják a meghatározást. A zavaró hatás Komplexon III segítségével kiküszöbölhető;

2/ a bemért urán és a mért urán mennyiségek középértékei közötti eltérés 30-3000 $\mu\text{g}/5\text{ml}$ koncentráció tartományban általában nem haladja meg a $\pm 3\%$ értéket. 30 $\mu\text{g}/5\text{ml}$ koncentráció tartomány alatt meghaladja a $\pm 15\%$ értéket.

A több évvel ezelőtt megkezdett urán extrakciós kísérleteink kiértékeléséhez szükséges urán meghatározási módszer megválasztásánál szem előtt tartottuk, hogy a módszer kielégítse az extrakciós vizsgálatok pontossági követelményeit, tehát legfeljebb $\pm 5\%$ hibával tudjuk az uránt meghatározni. Természetes kívánságunk volt, hogy a módszer specifikus legyen és akár az ércből, akár a technikai koncentrátumból készített feltárási oldatokban az urán mellett található, kationok és anionok / elsősorban Al^{+3} , Fe^{+3} , Fe^{+2} , Ca^{+2} , Mg^{+2} , Na^{+} , K^{+} , SO_3^{-3} , PO_4^{-3} , SO_4^{-3} / ne zavarják a meghatározást. A kísérleti körülményeink alapján a meghatározandó mintában a szerves anyagok közül éter, észter, nitrogén és foszfor vegyületek jelenlétével számolhatunk.

A módszernek érzékenynek és nagy koncentráció-tartományban alkalmazhatónak kell lennie, hiszen az extrakciós kísérleteknél az uránkoncentráció 5-6 $\mu\text{g}/\text{ml}$ - 150 mg/ml koncentráció között változhat mind a szerves, mind a vizes uránoldatokban.

A spektrofotometriás urán meghatározások ígérték érzékenység és gyorsaság szempontjából a legtöbbet. Az egyik leggyakrabban használt urán meghatározási módszer az uránnak peruránáttá alakítása és ilyen formában történő mérése. Ismeretes, hogy ezt a módszert általában karbonátos közegben alkalmazzák, ami egyidejűleg az urán bizonyos fokú elkülönítését is jelenti. A vizsgálatainknál alkalmazott oldatok savasak, sokszor eléggé

tömények. Az ilyen oldatok átlugosításához szükséges anyagok már sok esetben hibát okoznak. Gyakran tapasztaltuk a hidrogén-peroxid bomlását, ami szintén könnyen hibás mérési eredményekhez vezethet. Az előbb elmondottakhoz hozzáfűzhetjük, hogy a peruranátnál a moláris extinkciós koefficiens értékét 900-1200 nagyságúnak mérték, tehát a módszer érzékenysége nem kedvező. Ha az urán spektrofotometriás mérésénél 8-oxikinolint használunk reagensként, az urán meghatározás érzékenysége nő, de ezt a meghatározást több elem zavarja, mint a peroxidos meghatározás [1].

Hasonló a helyzet dibenzoilmetán reagens alkalmazása esetén is, amely egyébként az urán egyik legérzékenyebb reagense [2]. Ugyancsak számos ion zavarja a meghatározást és szükséges a pH ellenőrzése is. A meghatározást általában az urán előzetes elkülönítése után szokták végrehajtani. Az irodalomban a legkülönbözőbb elválasztási eljárásokat ajánlották: nátriumkarbonáttal történő lecsapás, cellulóz oszlopon adszorpció, extrakció /éter, etiléter, TBP, TOPO, MIK/.

Kísérleti rész

Az irodalmi adatok alapján a kísérleti munkát C.A. Francois dolgozata [3] nyomán kezdtük meg. Így az urán elkülönítését izooktánban oldott tributilfoszfáttal végeztük, majd piridin-aceton-víz elegyben oldott dibenzoilmetánnal nyert uranil komplex színét mértük. A szerző által ajánlott eljárásnál tapasztaltuk, hogy nagy gondot kell fordítani a minta pH-jának beállítására, és arra, hogy a szerves fázis kivételénél a vizes fázisból még nyomok sem kerüljenek be a szerves fázisba, mert ilyen esetekben a reagens hozzáadásakor - valószínűleg alumíniumhidroxidból álló - fehér csapadék válik ki. Ch. A. Horton és J. C. White úgy találták, hogy ha az acetonos vizes közeg helyett etilalkoholos közegben végzik a mérést, a reakció érzékenysége nő [4].

Mérési módszer

Maximálisan 3 mg uránt tartalmazó, 5 ml térfogatot meg nem haladó mintát pipettázunk egy 20 ml-es becsiszolt dugós kémcsőbe, szükség esetén vízzel 5 ml térfogatra töltjük fel. Az esetleg jelenlévő Ce^{+4} ionokat 1-3 csepp 5 % /g/ml/ nátriumszulfit oldattal redukáljuk. A mintához 2 csepp m-krezolbíbor, vagy timolftalein indikátort adunk. Ezután a mintát - a kémhatásnak megfelelően - salétromsavval, ammóniumhidroxiddal, vagy nátriumhidroxiddal olyan színre állítjuk be, mint amilyen szint az összehasonlító mintaként használt 0,02 n salétromsavhoz cseppentett indikátor mutat. Ha titán, vagy cirkónium ionok kicsapódnak, úgy kb. 50 mg nátriumfluoridot, tórium jelenlétében 1 csepp jégecetet teszünk a mintához.

Reagensok összetétele:

1/	extraháló oldat:	tributilfoszfát	1	térfogat
		izooktán p.a.	10	térfogat
2/	kisózó oldat:	aluminiumnit-		
		rát krist.		900 g
		viz	ad	1000 ml
3/	színhívó oldat:	dibenzoilmetán		10 g
		piridin p.a.		250 ml
		alkohol abs.	ad	1000 ml

Az urán extrahálásához 8 ml aluminiumnitrát kisózó oldatot adunk és pontosan 3 ml izooktánban oldott tributilfoszfát oldatot pipettázunk a kémcsőbe. 30 mp-ig tartó összerázás után a vizes és a szerves oldatot elválasztjuk. A szerves oldatból 2 ml-t pipettázunk egy 25 ml mérőlombikba. Tórium jelenlétében 1 ml piridint adunk a mintához, majd 5 ml reagens oldat bemérése után abszolút alkohollal jellegig töltjük.

A fényelnyelést 405 m μ -nál mértük, SzF-4, ill. Spektromom 201 spektrofotométeren.

1. táblázat

5 mg-ig lehet
mintánként

Ag^+ , Au^{+3} , Ba^{+2} ,	AsO_4^{-3} , BO_3^{-3} ,
Ca^{+2} , Cd^{+2} , Ce^{+4} ,	CrO_4^{-2} , MnO_4^{-} ,
Ce^{+3} , Cr^{+2} , Cu^{+2} ,	MoO_4^{-2} , SiO_4^{-2} ,
Fe^{+3} , Fe^{+2} , Ge^{+4} ,	VO_4^{-2}
Hg^{+2} , K^+ , Mg^{+2} ,	
Mn^{+2} , Na^+ , Ni^{+2} ,	
Pb^{+2} , Sn^{+4} , Sr^{+2} ,	
Th^{+4} , Ti^{+4} , V^{+4} ,	
Zn^{+2} , Zr^{+4}	

50 mg-ig lehet	CN^- , COO^- , CH_3COO^- , CO_3^{2-} , $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$, ClO_4^- , ClO_3^- , SO_3^{2-} , NH_2OH
100 mg-ig lehet	SO_4^{2-} , PO_4^{3-} , Cl^- , F^-

Az 1. táblázatban találjuk - az irodalmi adatok alapján[3,4] - a meghatározást zavaró ionokat.

Eredmények

A saját méréseink szerint szulfát ion 150 mg, a perklorát ion pedig 1 g mennyiségben is jelen lehet mintánként. Az irodalomban megadott zavaró ionok mennyiségére vonatkozó adatok, csak akkor helytállóak, ha a kiindulási vizes oldat nem tartalmaz szerves szennyezéseket /elsősorban extrahálásnál használt oldó- és komplexálószer/, amelyek az egyes ionoknak a tributilfoszfátos közegbe való átmenetét elősegíthetik.

Az elvégzett urán meghatározások során egyes esetekben azt tapasztaltuk, hogy a minták megvöröszödnék. Ennek okát keresve megállapítottuk, hogy vörös szín a dibenzoilmetánnak, a vas/II/, vagy vas/III/ ionokkal alkotott vegyületétől származik. A kisózáshoz alkalmazott erősen nitrátos közegből a tributilfoszfát a vas ionokat nem extrahálja. Ellenben, ha az analízisre bemért vizes oldatban dialkilfoszforsavak -ból akár csak nyomnyi mennyiség is jelen van, úgy a vas/II/, vagy vas/III/ ionok is átkerülnek a szerves oldatba és a dibenzoilmetánnal reagálva lehetetlenné teszik az urán meghatározását. A vas zavaró hatásának megszüntetésére kíséreltük meg a vasat komplexképzők /fluorid, foszfát, Komplexon III, Komplexon IV/ segítségével megkötni. Erre a célra a Komplexon III bizonyult legalkalmasabbnak. Vas ionok és dialkilfoszfát együttes jelenléte esetén a meghatározandó mintából legfeljebb 2 ml-t mértünk be és a mintát nem desztillált vízzel, hanem 0,1 mólus Komplexon III oldattal egészítjük ki 5 ml-re.

A módszer pontosságának megítélésére U_3O_8 standardból készi-

tett urán oldatokkal kalibrációs görbét vettünk fel. A mérés során nyert eredmények középértékét, azok hibáját /kerekítve/ és a bevitt és mért urán mennyiségek közötti legnagyobb és legkisebb eltérést adjuk meg /2. táblázat/.

2. táblázat

Küvet+ hossza cm	Mérések száma	Bevitt urán μg	Talált urán középérték középérték hibája μg μg		Legnagyobb mért eltérés a bevitt és talált urán között + eltérés % - eltérés %	
0,1	9	3000	3050	± 20	6,0	0,7
	9	2000	1870	± 22	0	8,0
	8	1000	1000	± 10	1,0	0
	10	500	500	$\pm 0,5$	4,0	4,0
0,2	8	2000	1970	± 28	2,0	4,0
	8	1500	1510	± 14	2,0	1,3
	8	1000	1012	± 4	2,5	0
	10	500	505	± 5	3,0	2,0
0,5	9	800	798	± 3	2,5	1,7
	10	600	612	± 4	6,0	0,3
	10	500	496	± 3	1,6	3,6
	10	400	398	± 3	1,7	4,0
1,0	10	400	399	± 2	2,5	2,2
	10	300	299	± 2	1,0	2,0
	10	100	100	± 2	5,0	2,0
2,0	8	200	200,5	$\pm 0,5$	1,5	0,5
	10	150	149,5	$\pm 0,6$	2,0	2,0
	10	100	99	$\pm 0,6$	3,5	4,0
	8	60	59	$\pm 0,7$	0,8	5,8
5,0	8	60	60,2	$\pm 0,2$	1,2	1,5
	8	50	50,2	$\pm 1,1$	10,0	4,0
	8	40	39,9	$\pm 0,6$	3,0	5,0
	8	30	29,6	$\pm 0,2$	0,8	5,0
	6	15	12,3	$\pm 0,2$	0	15,0
	10	7,5	6	$\pm 0,5$	17,0	37,0

A mérési adatokból kitűnik, hogy a módszer 6 $\mu\text{g/ml}$ urántartalmu oldatok esetén még alkalmazható, alacsonyabb uránkoncentráció esetén már nem megbízható.

Annak eldöntésére, hogy az extraháló szereket tartalmazó alkoholos közegben végzett mérés a módszer érzékenységét befolyásolja-e, összehasonlítottuk a dibenzoilmetán uranil ionnal alkotott vegyületének moláris extinkciós koeficiensét vizes oldatban és izooktán-tributilfoszfát elegyben. Mérési eredményeink szerint izooktán-TBP elegyben az uranildibenzoilmetán moláris extinkciós koeficiense:

$$/17,6 \pm 0,1/ \cdot 10^{+3}$$

Irodalmi adatok [1] szerint vizes oldatban a moláris extinkciós koeficiens $19 \cdot 10^3$ körüli érték, tehát nincs lényeges csökkenés.

I r o d a l o m

- [1] Steele T.W., Traverner L.: II. UNIC. 3, 510-526 /1958/
- [2] Yoe J.H., Will F., Black R.A.: Anal. Chem. 25, 1200-3 /1953/
- [3] Francois C.A.: Anal. Chem. 30, 50-54 /1958/
- [4] Horton Ch.A., White J.C.: Anal. Chem. 30, 1779-84 /1958/

Érkezett: 1964. máj. 8.

KFKI Közl. 12. évf. 3. szám, 1964.

SIKKATÓDOS VEZÉRELHETŐ ELEKTRONFORRÁS VIZSGÁLATA

Irta: Gombos Péter, Roósz József és Vályi László

Összefoglalás

Megvizsgáltuk egy sikkatódos hengeres fókuszált nyalábot adó elektronforrás fókuszálási tulajdonságait, méréseket végeztünk az elektronforrás karakterisztikáira, adott paraméterek esetén stabilitására, a katód által emittált és a targetre fókuszált áram viszonyára, adott geometria mellett a katód fűtőteljesítményének függvényében a targetre jutó áramértékekre.

Bevezetés

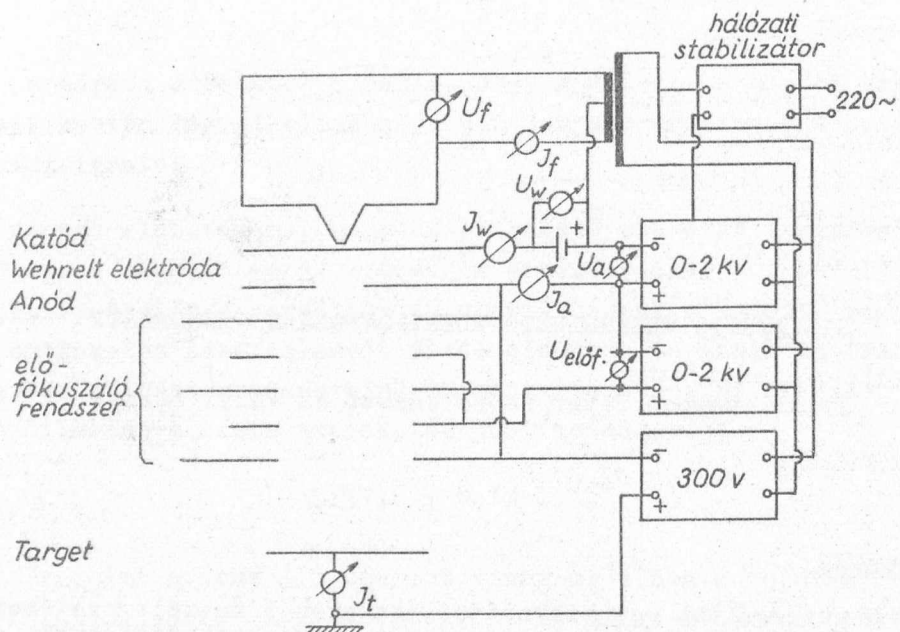
A nyomás alatti elektrosztatikus gyorsítóban használt vezérelhető intenzitású és jól fókuszálható elektronnyalábot adó elektronforrások vizsgálatát az egyre nagyobb precizitást megkövetelő magfizikai kísérletek és a magfizikai módszereknek a szilárdtest fizikai és kémiai kutatások területén való elterjedése teszi szükségessé.

Mint ismeretes, a fent említett célnak megfelelő, elektrosztatikus gyorsítóban használt elektronforrásoknak néhány elkerülhetetlenül szükséges követelménynek kell eleget tenniük. Így pl. jó fókuszálási tulajdonság, elég meredek $I_t(U_w)$ karakterisztika, többszöri lelevegőzés esetén is hosszú élettartam, kis energiaszükséglet, stb. [1, 2, 3, 4].

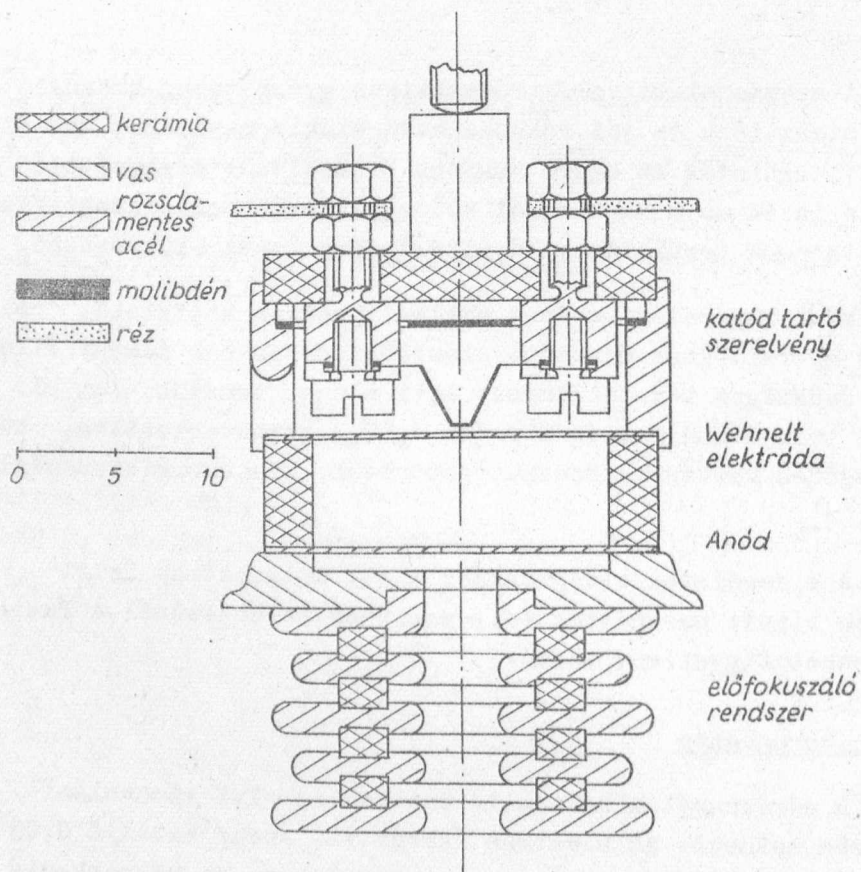
A vizsgálatok elvégzéséhez a [5] dolgozatban leírt elektronforrás típust használtuk fel, amelynek tervezésénél a fenti követelményeket figyelembe vették.

Kísérleti berendezés

A méréseknél alkalmazott berendezés elvi kapcsolási rajza az 1. ábrán látható. Az elektron forrás /2. ábra/ katódja 0,03 mm vastag 1 mm széles Wolfram szalag, amelytől 0,5 mm-re helyezkedik el az 1 mm-es blende nyílású tantál Wehnelt elektród, majd ettől 7 mm-re kö-



1. ábra



2. ábra

vetkezik a 2 mm-es blende nyílású anódtárcsa. Ezután van elhelyezve a 6 mm-es blendenyílással rendelkező periódikus előfókuszáló rendszer. A fókuszálás vizsgálatára és az árammérésre szolgáló villemittel bevont target az előfókuszáló rendszer utolsó elektródájától 120 mm-re van elhelyezve. A vákuum előállítására egy 10^{-5} - 10^{-6} Hgmm-s vákuumot előállító folyékony nitrogénes kifagyasztóval ellátott vákuumrendszer szolgált. A berendezés táplálása egy 1%-os stabilitású váltóáramú stabilizátorral történt.

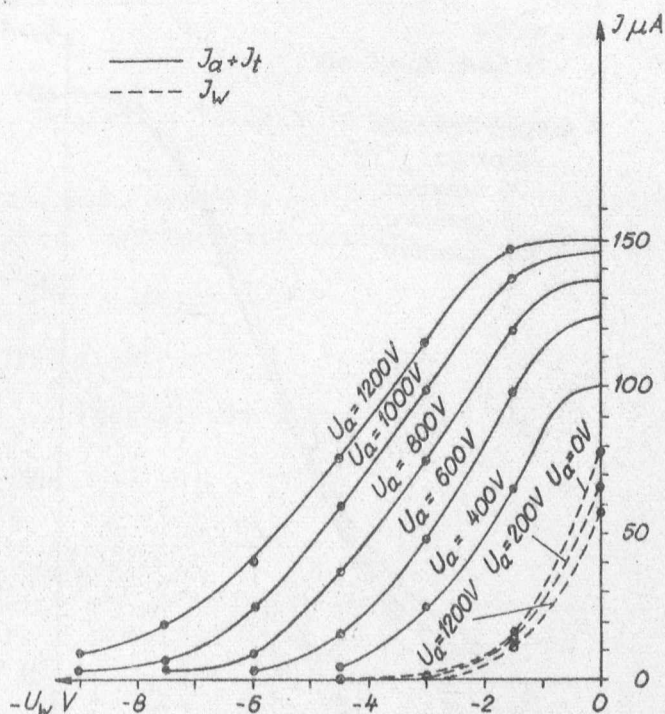
Mérési eredmények

Az elektronforrás vezérelhetőség szempontjából gyakorlatilag jól megegyezik egy triódával. Ennek megfelelően a működésére jellemző tulajdonságainak és így a karakterisztikáinak is hasonlóknak kell lenni. Mint a 2. ábráról látható, az elektronforrás geometriai és optikai elrendezése egy sikkatódos lyukas Wehnelt elektródás és anódos rendszernek felel meg. A blendenyílások méretezése a tértöltés hatásának /amely már jelentkezik, mivel a perveancia értéke $5 \cdot 10^{-7} \alpha / \sqrt{3/2}$ / figyelembevételével történt.

Az elektronforrás karakterisztikáinak felvételénél az I_t target és az I_a anódáram összegét / $I_t + I_a = I$ / I -vel jelöljük. A 3. ábrán látható az I áram értéke a Wehnelt lemezre adott feszültség U_w függvényében, különböző anódfeszültségek esetén. A karakterisztikasereg formája jó egye-

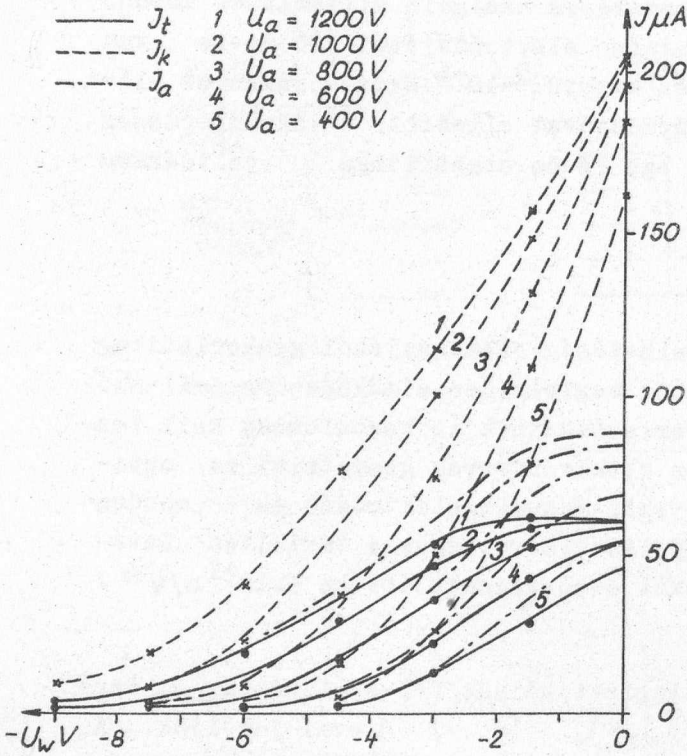
zésben van a trióda karakterisztikákkal. Az ábrán még az U_w függvényében mért I_w /Wehnelt elektródán mért áram/ is található, amelyből jól látható, hogy a Wehnelt elektródán -4,5 V-nál negatívabb U_w esetén áram nem folyik, így a -4,5 V-nál negatívabb U_w feszültség tartományban az elektron forrás gyakorlatilag teljesítménymentesen vezérelhető és meredeksége $10 \mu A / V$.

A katód által emitált elektron áram / I_k / és a targetre fókuszált elektronáram / I_t / értékeinek összehasonlítása az U_w függvényében



3. ábra

különböző anódfeszültség U_a esetén azt mutatta, hogy I_t/I_k 0,3-0,5 között változik /4. ábra/.

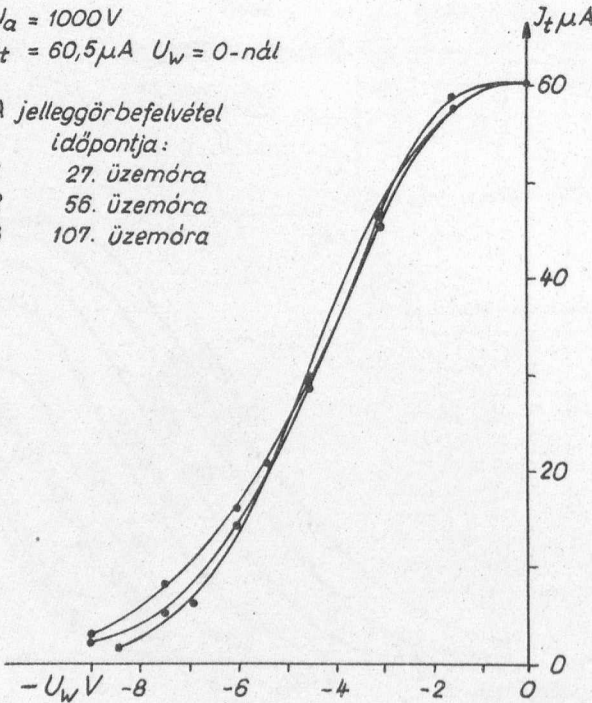


4. ábra

$U_a = 1000V$
 $J_t = 60,5 \mu A$ $U_w = 0$ -ndl

A jelleggörbefeelvétel
 időpontja:

- 1 27. üzemóra
- 2 56. üzemóra
- 3 107. üzemóra



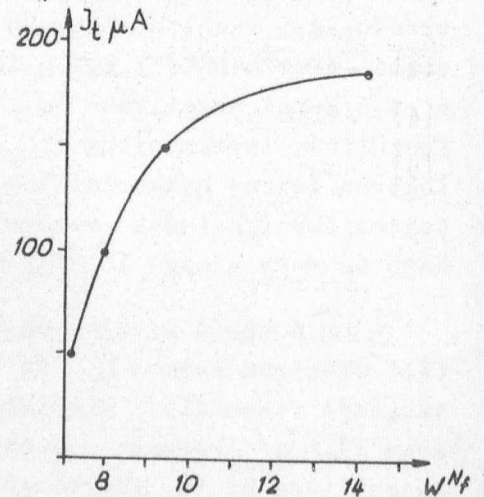
5. ábra

Az elektronforrás karakterisztikájának időbeli stabilitása igen fontos a vezérelhetőség szempontjából. Ilyen irányu vizsgálataink azt mutatták, hogy a karakterisztika 107 órás üzemeltetés alatt és az azt meghaladó idő után is gyakorlatilag nem változott /5. ábra/.

Az adott geometriai elrendezés mellett 1000 Volt anódfeszültség és 0 V Wehnelt feszültség esetén megvizsgáltuk a targeten mért áramnak a katódfűtés teljesítményétől való függését /6. ábra/.

Az ábrából megállapítható, hogy 100 μA targetáram eléréséhez elegendő 8 W és a target-

$U_a = 1000V$
 $U_w = 0V$



6. ábra

áram jó hatásfokkal $150 \mu\text{A}$ -ig növelhető. A targetáram további növelése lehetséges még az anód feszültség emelésével, de ez előfókuszáló feszültség növelését vonná maga után.

A targetáram ingadozása 10 órás üzem alatt, ha az elektronforrás tápegységeit is 1%-os stabilitású hálózati stabilizátorról járatjuk, kisebb, mint $1 \mu\text{A}$. Az elektronforrásban alkalmazott katóddal a forrás élettartama a vákuumrendszer többszöri lelevegőzése után is 4-500 óra volt.

A fentiekben leírt vizsgálatok azt mutatják, hogy a vizsgált elektronforrás jól alkalmazható a nyomás alatti elektrosztatikus generátorokban, mind a nagyfeszültség finomstabilizálásához, mind az elektrongyorsítók folyamatos, vagy impulzusüzemű elektronforrásaként, mivel 1000 V anódfeszültség esetén -10 V Wehnelt feszültség alkalmazásakor teljesen lezár, és -4,5 V alatt teljesítménymentesen vezérelhető. A periodikus előfókuszáló rendszer lehetővé teszi a nyaláb fókuszálását néhány cm-től ∞ -ig, így az, elektronoptikai szempontból nehézség nélkül illeszthető a gyorsító csövekhez. Az elektronforrás energiaszükséglete, beleszámítva a fűtés, anódfeszültség, Wehnelt feszültség és előfókuszáló feszültség előállítását, kb. 35-40 W.

I r o d a l o m

- [1] A.K. Валтер, А.А. Цыгикало, Приборы и Техника Эксперимента 4, 3 (1957)
- [2] A.K. Валтер, Ф.Г. Железников, И.Ф. Малышев, Г.Я. Рошаль, А.Н. Сербинов, А.А. Цыгикало, С.П. Цытко, Электростатистические ускорители заряженных частиц, Москва, 1963.
- [3] Baruch P.: Nucl. Instr. 11, 196 /1961/
- [4] Amman F.: Nucl. Instr. 11, 169 /1961/
- [5] Gombos P., Roósz J., Vályi L.: /megjelenés alatt/

Érkezett: 1964. ápr. 21.

KFKI Közl. 12.évf. 3. szám, 1964.

SZEMÉLYI DOZIMÉTER NAGY /BALESETI/ DÓZISOK MÉRÉSÉRE

Irta: Békés Mártonné és Deme Sándor

Összefoglalás

Sugárbaleset következtében elszenvedett nagy γ és neutron dózisokat mérő dozimétert dolgoztunk ki. A doziméter film, arany, kén és foszfor detektorokból áll. Számításokat végeztünk egy feltételezett -termikus, $1/E$ és hasadási összetevőkből álló - neutron spektrum alapján. A dózis 5-1000 rad között 10-20 % pontossággal mérhető.

Bevezetés

Sugárbaleseteknél rendkívül fontos a gyors, megbízható dózismérés. Intézetünkben mindezig nem volt megoldva ez a kérdés, ezért szükségesnek látszott a baleseti dózismérő kidolgozása. A használatban lévő, külső besugárzást mérő személyi doziméterek - film [1], kondenzátorkamra - ugyanis csak kis β -, γ - és termikus neutron dózisokat tudnak kimutatni /max. 2-10 rad/, hiszen céljuk a normális munka során esetleg elszenvedett dózis regisztrálása.

Egyszeri, teljes-test besugárzásnál a félhalálos dózist emberre 300-500 rem-re becsülik [2], néhány baleset tapasztalata szerint azonban jóval 800 rad felett kezdődtek a halálos kimenetelű esetek [3]. A látszólagos ellentmondás oka, hogy ilyen esetekre az RBE értékek még nem tisztáztak, valószínűleg lényegesen kisebbek, mint amelyek a megengedhető szinteknél alapul szolgálnak [4].

A fentiek alapján célszerű a baleseti doziméter mérési tartományát 5-1000 rad között megválasztani. A doziméternek röviddel a besugárzás után kiértékelhetőnek kell lennie valamilyen egyszerű berendezéssel.

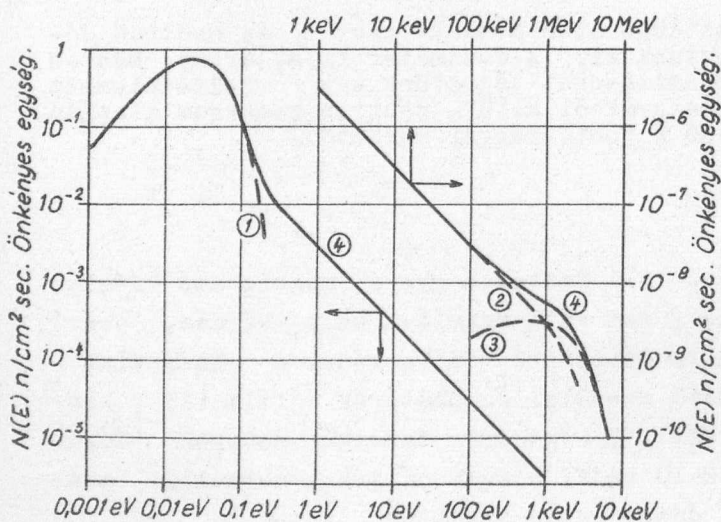
A jelentősebb külső besugárzással járó balesetek főleg kritikus rendszereknél fordulnak elő. Az ilyen baleseteknél neutron és γ -sugárzás lép fel. Dózisuk aránya természetesen függ a kritikus rendszertől, rad-ban mérve a γ -dózis általában néhányszorosan a neutron dózissal [5]. Mivel a neutronok viszonylag nagyobb biológiai hatást váltanak ki, a baleseti doziméternek külön-külön kell mérnie a neutron és gamma dózist.

A neutrontózs mérése

I. A neutronspektrum és a dózis

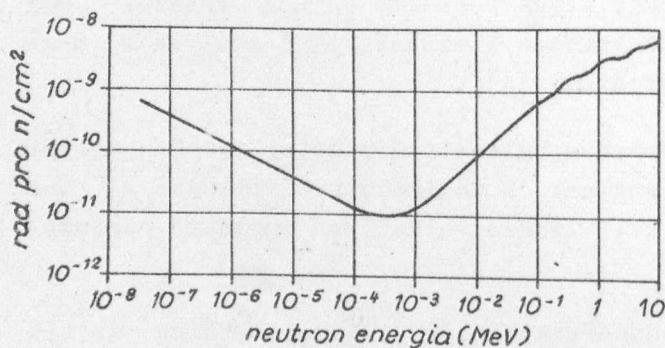
A neutrontózs mérésére célszerű különböző neutronenergiákon érzékeny aktivációs detektorokat használni [6, 7, 8] .

Tételezzük fel, hogy vízmoderátoros hasadó rendszerünk van, melynél balesetkor a neutronok széles nyalábbb rövid besugárzási idő alatt adják le a dózist. A neutronspektrumot ekkor három részből összerakva tekinthetjük: Maxwell eloszlású termikus (1), $1/E$ eloszlású epitermikus (2), és hasadási neutronokból (3). Jelöljük a teljes neutroneloszlást $N(E)/-$ vel (4)/1. ábra/.



1. ábra

A feltételezett neutron spektrum



2. ábra

Neutrontózs az energia függvényében

Az egységnyi neutronfluensre vonatkoztatott dózis energiafüggő. Az összefüggés a 2. ábrán látható [9] . A dózis itt a testszövettel közölt összes energiát reprezentálja, melynek ujabban javasolt egysége a kerma /kinetic energy released in material/. A közölt dózis csak akkor egyezik meg a rad-ban mért elnyelt dózissal, ha kiterjedt testben energiaegyensúly áll fenn [10, 11] .

Jelöljük a dózis-energia függvényt $K(E)/-$ vel.

Ekkor a neutrontózs

$$D_n = \int_0^{\infty} K(E) N(E) dE .$$

Fenti megfontolás alapján

$$N(E) = N_T f(E) + N_{1/E} \frac{u(E-E_k)u(E_0-E)}{E} + N_H n(E)$$

*/ Neutronfluens: egységnyi felületen áthaladó neutronok száma.

ahol N_T a termikus neutronfluens
 $f(E)$ a normált Maxwell spektrum, $\int_0^\infty f(E)dE = 1$
 $N_{1/E}$ az epitermikus neutronfluens
 $u(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$
 E_K az $1/E$ szakasz alsó energiahatára
 E_0 az $1/E$ szakasz felső energiahatára
 N_H a hasadási neutronfluens
 $n(E)$ a normált hasadási spektrum, $\int_0^\infty n(E)dE = 1$.

A dózis ezek alapján szintén három részre bontható:

$$D_n = N_T K(E_T) + N_{1/E} \int_{E_K}^{E_0} K(E) \frac{dE}{E} + N_H \int_0^\infty n(E) K(E) dE.$$

E_K -t válasszuk 0,4 eV-nak - ez a Cd levágás energiája, E_0 -t pedig a már egyszer ütközött hasadási neutronok átlagenergiájának, 1 MeV-nek.

A neutronfluensek faktorait tehát a K/E görbéből közvetlenül, ill. a K/E és N/E függvények grafikus integráljából megkaphatjuk.

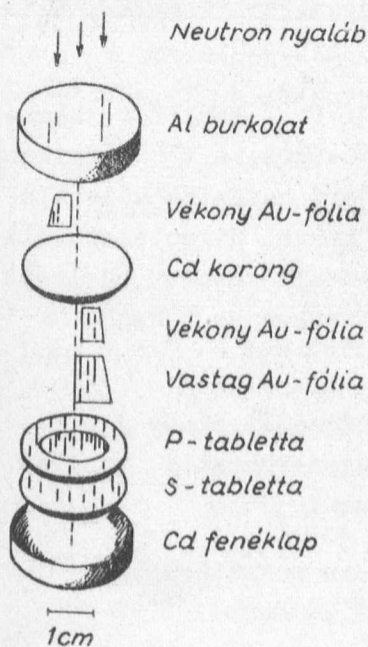
$$K(E_T) = 7 \cdot 10^{-10} \text{ rad/n cm}^{-2}$$

$$\int_{E_K}^{E_0} K(E) \frac{dE}{E} = 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ rad/n cm}^{-2}$$

$$\int_0^\infty n(E) K(E) dE = 3,0 \cdot 10^{-9} \text{ rad/n cm}^{-2}.$$

II. A detektorok

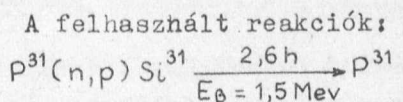
Neutron doziméterünket a 3. ábra mutatja.



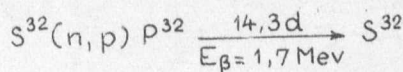
A 0,5 mm-es Al sapka mögött egy 5×10 mm-es, 26 mg/cm^2 vastag Au fólia, majd 0,5 mm-es Cd lemez mögött hasonló méretű Au fólia van elhelyezve. Ezek szolgálnak a termikus és epitermikus neutronfluens mérésére.

A 10×8 mm-es, 220 mg/cm^2 vastag Au fólia célja egyrészt a testről visszaszórt epitermikus neutronok elnyelése, másrészt gyors kontroll lehetősége.

A gyors neutronok mérésére két külsődetektor - foszfor és kén - szolgál.



és



3. ábra

A neutrontoziméter

A foszfor mellett a kb. 50-szer érzéketlenebb kéndetektort azért alkalmazzuk, hogy szükség esetén még több nappal az expozíció után is megmérhessük a neutrontózist.

A P tabletta vörösfoszforpor és polistírol keverékéből, az S tabletta kénporból, préseléssel készül. Előbbi átmérője 12 mm, utóbbié 21 mm, vastagságuk 2,5-3 mm.

Mivel a foszfortabletta a kötőanyag hozzáadása ellenére is törik, mállik hosszabb idő után, két oldalon fóliával lefedett gyűrű alakú polietilén tokba helyeztük. A vékony polietilénfólia sem a neutronokat, sem az aktiválódás következtében kilépő bétákat nem gyengíti számottevően.

A doboz alja 0,5 mm vastag Cd-ből készült, így egy Au fólia kivételével az egész detektort Cd borítja.

III. A mérőberendezések

Az Au fóliák aktivitását γ , a küszöbdetektorokét β méréssel határozzuk meg.

A mérés szcintillációs berendezéssel történik, \varnothing 1,5" x 1"-es NaJ/Tl/ kristállyal, mely 5 cm falvastagságú ólomburkolatban van.

A háttér: 64 i/p

Kalibrálása β - γ koincidencia módszerrel történt.

A β méréshez Philips gyártmányú végablakos GM-csővet használunk. A cső ablakának átmérője 20 mm, vastagsága 1,5 - 2 mg/cm², 5 cm vastag ólomvédelem mögött a számláló háttére 8,5 i/p.

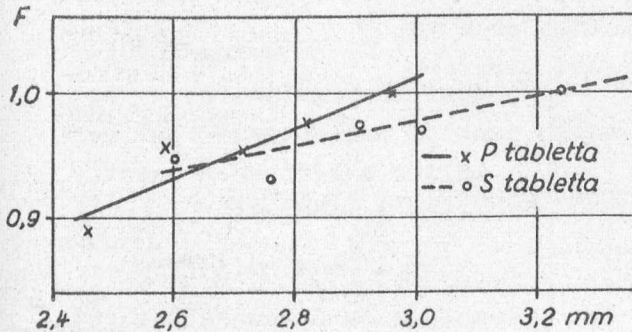
A hatásfok meghatározásához a $P^{31}/n, \gamma / P^{32}$ reakciót használjuk ki, mely termikus neutronok hatására megy végbe, a termikus fluxust pedig Au mérésből kapjuk meg. Az így nyert hatásfok közvetlenül használható a kéndetektorhoz, a foszfordetektornál figyelembe kell venni a nagyobb önabszorpciót. Azonban, mivel a doziméterben használt tabletták átmérője különböző, újabb hitelesítés szükséges a nagy S tablettára vonatkozó hatásfok megállapításához.

A hatásfok a tabletták vastagságára kevésbé érzékeny /l. 4. ábra/, ezért nem követünk el nagy hibát, ha átlagos tabletta vastagsággal számolunk. / A tabletták átmérője egyforma/.

A GM-cső hatásfokát közvetlenebb módon is meghatároztuk.

Legyen a forrás felülete S cm²

vastagsága	x cm
sulya	9 gram
abszorpciós együtthatója	μ cm ² /g
a számlálás hatásfoka	$\eta = \frac{S \cdot G \cdot V \cdot (1 - e^{-\mu x})}{g \cdot \mu}$
ahol	G a geometriai,
	V a visszaszórási tényező /Al/.



4. ábra

A hatásfok vastagság-függése

lyezve megmértük a számláló térszögét, mely 22 %-nak adódott viszonyítva a teljes 4π térszöghöz.

Ebből és az ablak, valamint a forrás átmérőjéből kiszámítottuk a geometriai faktort, melyet a fenti összefüggésbe helyettesítve, a foszfortablettára vonatkozó hatásfok a méréssel jó egyezésben 7,25 %-nak adódott.

IV. A neutronfluensek meghatározása

A két vékony Au fóliával mért számlálási sebesség legyen r_1 és r_2 , ahol r_2 a Cd-al burkolt Au adata, súlyuk pedig rendre m_1 és m_2 .

Ekkor, föltéve, hogy a fólia a termikus fluxust nem zavarja,

$$N_T = \frac{e^{\lambda t} A}{\eta L \lambda \sigma_t} \left(\frac{r_1}{m_1} - \frac{r_2}{m_2} \right) = \frac{C_1 e^{\lambda t}}{\sigma_t} \left(\frac{r_1}{m_1} - \frac{r_2}{m_2} \right)$$

ahol λ az Au ¹⁹⁸ bomlásállandója

t a besugárzás és mérés között eltelt idő

A az arany atomsulya

η a számláló hatásfoka /1,2 %/

L az Avogadro szám

σ_t pedig a termikus neutronok aktivációs hatáskeresztmetszete / $95 \cdot 10^{-24}$ cm²/

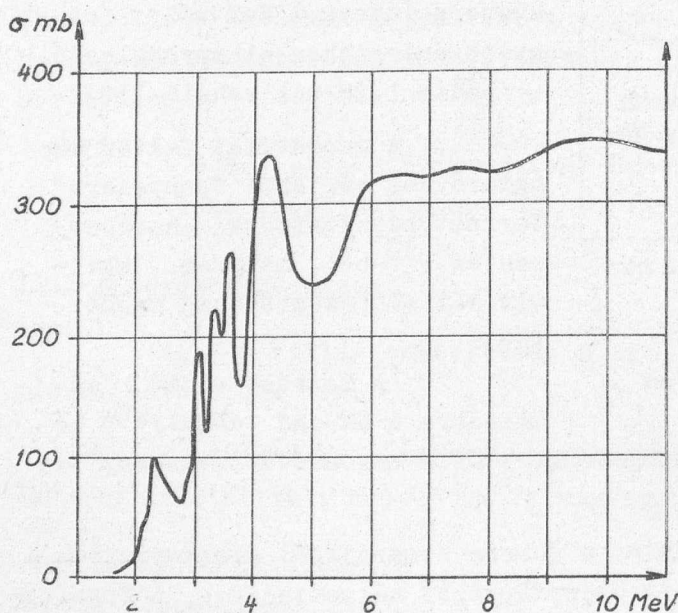
Az epitermikus fluens:
$$N_{1/E} = \frac{C_1 e^{\lambda t}}{\int_{E_k}^{\infty} \sigma(E) \frac{dE}{E}} \cdot \frac{r_2}{K m_2},$$

ahol a rezonanciaintegrál értéke 1300 barn [12], a K faktor az epitermikus neutronoknak a fóliában történő abszorpcióját veszi figyelembe. K értéke 0,76 [14] .

Hasonló módon írható fel a gyorsneutron fluens is:

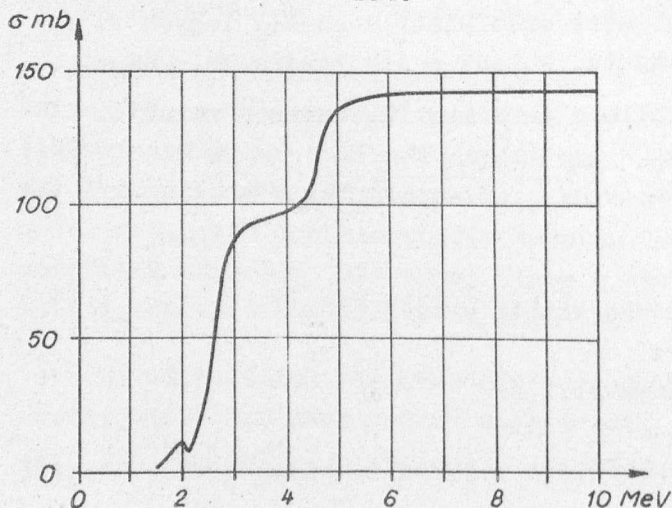
$$N_H = \frac{C_3 e^{\lambda t}}{\overline{\sigma}_H} \frac{r_3}{m_3 F}$$

Itt C_3 -ba a kén, ill. foszfor adatai helyettesítendő, $\eta_S = 7,0 \%$,
 $\eta_P = 7,2 \%$.



5. ábra

Az $S^{32}/n, p/P^{32}$ reakció hatáskeresztmetszete



6. ábra

A $P^{31}/n, p/Si^{31}$ reakció hatáskeresztmetszete

F a vastagságfüggést korrigálja, ha m_3 súlyu tablettával kalibráltuk a mérőberendezést. /lásd 4. ábra./

$$\overline{\sigma}_H = \int_0^{\infty} \sigma(E) N(E) dE,$$

mely a hatáskeresztmetszet-függvények ismeretében kiszámítható. A kén és foszfor hatáskeresztmetszetét az 5. és 6. ábra mutatja. A hasadási spektrumra vonatkoztatott átlagos hatáskeresztmetszetek;

P -re 28 mb

S -re 73 mb

Megjegyzendő, hogy foszfor esetében az r beütésszámot az eltelt időtől függően korrigálni kell az egyidejűleg keletkező P^{32} miatt.

Látható a 7. ábrán, hogy esetünkben 5 óra után az eltérés már kb. 15 %.

V. A dózis számítása

Az állandók behelyettesítésével a dózistra a következő formulákat kaphatjuk:

$$D_T = 6,75 \cdot 10^{-2} e^{\lambda t} \left(\frac{r_1}{m_1} - \frac{r_2}{m_2} \right)$$

$$D_{\text{epi}} = 3,15 \cdot 10^{-3} e^{\lambda t} \frac{r_2}{m_2}$$

$$D_H(P) = 1,03 \cdot e^{\lambda t} \frac{r_3}{m_3 F}$$

$$D_H(S) = 55,9 \cdot e^{\lambda t} \frac{r_3}{m_3 F}$$

ahol r -ek a netto beütésszámok másodpercenként,
 m -ek a detektorok súlyai g-ban /foszfor
 esetében természetesen a kötőanyag nélkül/.

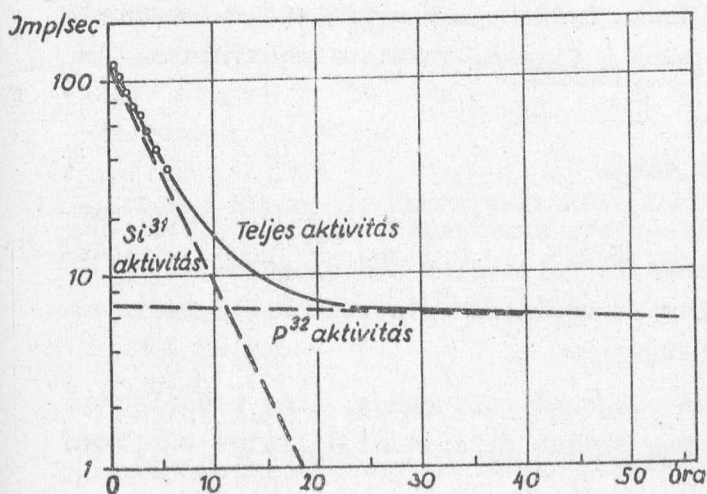
Ekkor D -ket rad-ban kapjuk.

A megfelelő három dózis összege adja az összes elnyelt neutron-dózist.

A gamma-dózis mérése

A γ -dózis mérésére kis érzékenységu filmet [15, 16], vagy üvegdozimétert [17] szokásos használni. Utóbbi kis mérete, energiafüggetlen jelzése és tág mérés határai 10^{-2} - 10^5 rad/ miatt alkalmas baleseti és megengedhető színű doziméternek egyaránt [18].

A γ -dózis mérést filmmel oldottuk meg.

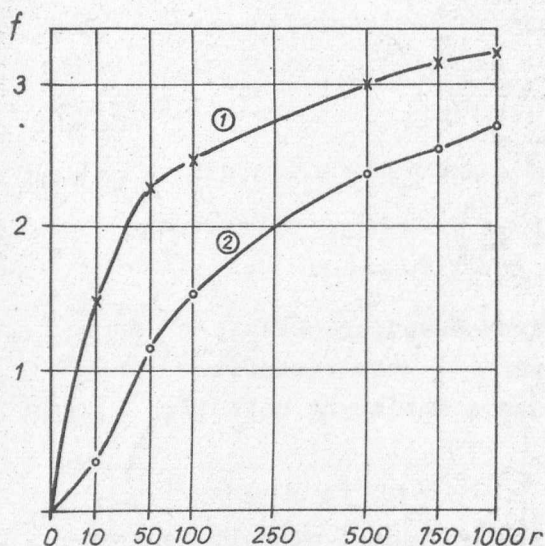


7. ábra
 Si^{31} és P^{32} bomlás görbéje

próbáltuk az Agfa gyártmányu "Dokumentfilm"-et, a Forte gyártmányi "Kinopozitiv" és "Reprofort" filmet. Ezek közül céljainknak az utóbbi felelt meg legjobban.

A filmet $4 \times 3,6$ cm-es darabokra vágtuk, fekete papirba csomagoltuk, majd $2/3$ részben $0,5$ mm-es ólommal burkoltuk. Az így kialakított γ doziméter a neutrondoziméter mellé helyezve, PVC tasakba hegesztve, biztosítótüvel ellátva képezi a komplett baleseti személyi dozimétert.

A 8. ábrán látható a film feketedés - dózis görbéje. A besugárzás 75 keV effektív energiájú röntgen sugárzással készült, a filmet "Agfa-30" hívóban $1:8$ -hoz higitva $18,4$ °C-on 12 percig hívtuk. /Az optikális előhívási körülményeket számos híváspróba során kísérleteztük ki./



8. ábra
Reprofort film feketedési
görbéje

az érték $0,3 \text{ r}$.

A módszer alkalmazási határai és hibái

Méréseket végeztünk a kísérleti atomreaktor egy vízszintes csatornájánál. Itt az I. pontban szereplő feltételek nem elégülnek ki, ezért számításainkban szűrt, kollimált nyalábra vonatkozó kifolyási neutron spektrumot tételeztünk fel [22].

Egy-két perces expozíció elegendő volt ahhoz, hogy a dózisokat kellő statisztikus pontossággal meg tudjuk állapítani, illetve a filmen jól mérhető feketedés legyen.

A γ dózis 10 és 1000 rad között mérhető ± 20 %-os hibával. A neutronmérés alsó korlátja termikus neutronokra 4, epitermikus neutronokra 1, gyors neutronokra 0,8 rad, ha a mérést az expozíciót követő 1 órán belül el tudjuk végezni. Ha 24 óra múlva mérjük a kéntabletta aktivitását, a kimutatható legkisebb dózis 10 rad.

Felső korlát gyakorlatilag nincs. Az aktivitás mérés pontossága ± 10 %, ha a mérési idő 5 perc. Amennyiben az expozíció idejét csak félórás pontossággal ismerjük, ez újabb 10 %-os bizonytalanságot jelent.

Jelentős hibát követhetünk el, ha nem ismerjük a balesetet szenvedő egyén pozícióját a besugárzás pillanatában, tehát, hogy a sugárzás szemből, oldalról, vagy hátulról érte-e [23]. Ezért szokták a

Tekintve, hogy reakciók γ spektrumában túlnyomórészt $> 300 \text{ keV}$ -es energiák fordulnak elő [19], a fenti kalibráció nem használható. Ra-forrással besugározva a filmeket, hasonló lefutású feketedési görbét kaptunk, az ólomszűrő alatti értékek kb. 20 %-kal kisebbek voltak.

A filmek - emulziótól függően - érzékenyek a neutronokra is. Erre vonatkozó méréseket nem végeztünk, de irodalmi adatok alapján [20, 21], megállapítható, hogy a hatás csekély. A nagyobb biológiai dózist okozó gyors neutronoknál 1 rad neutrodózis mindegyike 0,02 r-nek megfelelő feketedést okoz a filmen. Termikus neutronokra ez

baleseti dozimétert úgy is kialakítani, hogy arany nyakláncon függ a dózismérő [24]. Besugárzás után a láncot darabokra szedik és így állapítják meg 45° -on belül/ az orientációt.

Egyszerűbb és olcsóbb módszert követtünk, amennyiben több dozimétert helyeztünk el a kritikus pontok környezetében, falakon, berendezési tárgyakon. Ezekkel a balesetet követően megállapíthatjuk a dóziseloszlást, és a személyek tartózkodási helyének ismeretében további adatunk van a károsodás mértékéről.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondunk Klemm Andor és Zalán Béla kartársaknak a doziméterek gondos elkészítéséért és a mérésekben nyújtott segítségükért.

I r o d a l o m

- [1] Békés Mártonné, Makra Zs.: KFKI Közl. 9, 251 /1961/
- [2] Hine G.J., Brownell G.L.: Radiation Dosimetry, Academic Press /1956/
- [3] Wald N., Thoma G.e.: ORNL-2748/B
- [4] MSZ 62-61
- [5] Hurst G.S. et al: Health Physics 5, 179 /1961/
- [6] Braun J., Nilsson R.: AE-33 /1960/
- [7] Gupton E.D., Davis D.M., Hart J.C.: Health Physics 5, 57 /1961/
- [8] Trebilcock R.J.: Neutron Dosimetry, IAEA Symposium, Harwell, 1962
- [9] Protection against Neutron Radiation, NBS Handbook 63 /1957/
- [10] Fehér I.: Atomtechn.Táj. 6, 693 /1963/
- [11] Boag J.W.: Phys.Med.Biol. 7, 409 /1963/
- [12] Lamberieux J.: Neutron Dosimetry, IAEA Symposium, Harwell, 1962
- [13] Hughes D.J.: Pile Neutron Research, Addison-Wesley Publ. Comp. /1953/
- [14] Albert D.: Kernenergie 5, 154 /1962/
- [15] Bojtor I., Kiss I., Koczás Gy.: M.Fiz.Folyóirat 11, 1 /1963/
- [16] Nilsson R., Braun J.: AE-13 /1958/
- [17] Bramson P.E.: HW-SA-2625 /1962/

- [18] Yokota R., Nakajima S., Sakai E.: Health Physics 5, 219 /1961/
- [19] Hurst G.S., Ritchie R.H., Emerson L.C.: Health Physics 2, 121 /1959/
- [20] Becker K.: Filmdosimetrie, Springer Verlag, /1962/
- [21] Smith R.J., Benck R.F.: Health Physics 2, 473 /1963/
- [22] Fährmann K.: ZfK-RN 10 /1960/
- [23] Henry H.F.: Health Physics 6, 86 /1961/
- [24] Redmond J.W.: Y-1405 /1962/

Érkezett: 1964. máj. 8.

KFKI Közl. 12. évf. 3. szám, 1964.